Continuité
et
théorème des valeurs intermédiaires

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 52 : N°**22**, **24**, **26**, **30**, **32**
Page 53 : N°**37**, **39**, **41**, **46**
Page 54 : N°**47**, **49**, **51**, **53**
Page 57 : N°**64**
Page 58 : N°**67**, **71**, **72**

N°22 page 52

Soit $m \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) La fonction *f* sera continue en 2 si, et seulement si : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = f(2)$.

On peut d'ores et déjà affirmer que la fonction *f* est continue en 2 à droite puisqu'elle est définie sur cet intervalle comme composée de deux fonctions continues.

Il nous suffit donc en fait d'établir la continuité à gauche de 2, soit : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = f(2)$.

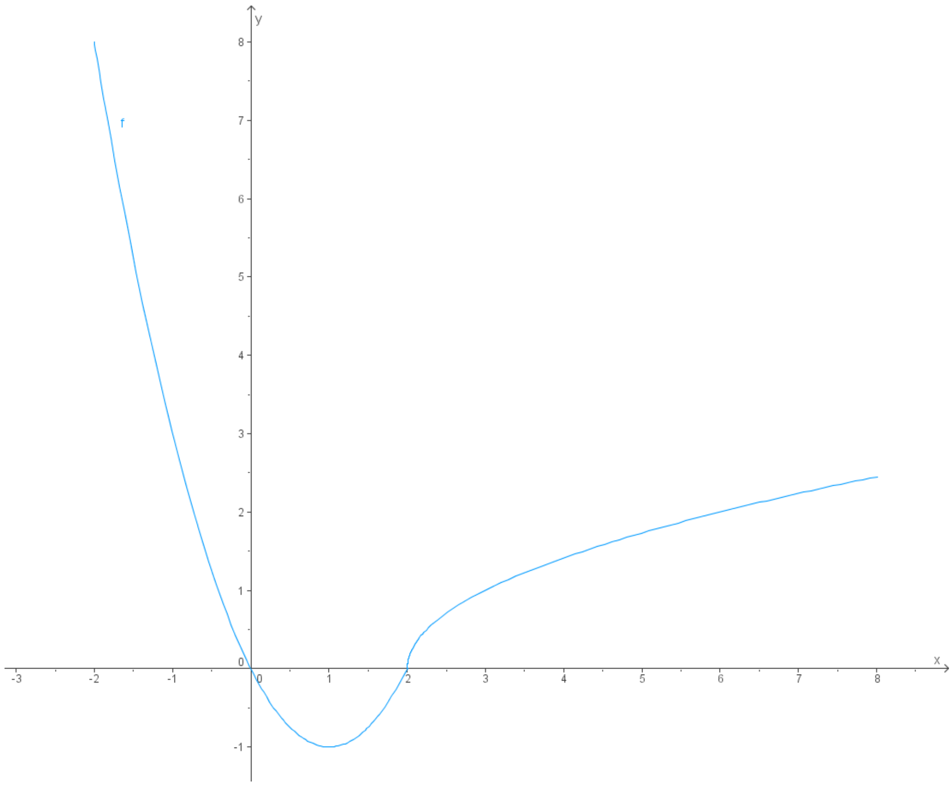
Or, on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \left(x^2 + mx\right) = 4 + 2m$ et $f(2) = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$. La fonction *f* sera donc continue à gauche en 2 pour *m* tel que : $4 + 2m = 0$, soit $m = -2$.

En définitive :

La fonction *f* est continue en 2 pour $m = -2$.

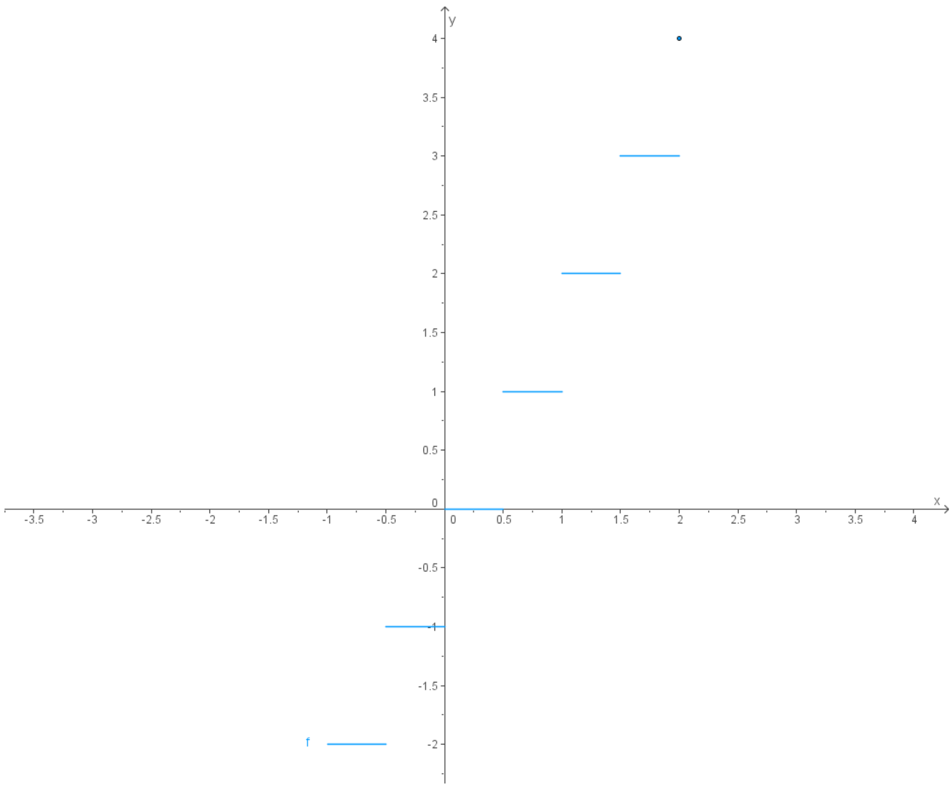
b) On obtient alors la courbe représentative suivante :

Sur la figure de la page suivante, on a représenté la courbe représentative de la fonction *f* pour $x \in [-2;8]$.



N°24 page 52

a) On obtient :



b) D'après la représentation graphique obtenue précédemment, il semblerait que la fonction *f* soit discontinue en tout réel de la forme $\frac{n}{2}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Considérons donc un tel réel et travaillons sur l'intervalle $\left]\frac{n}{2}-\frac{1}{2};\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right[$.

On a bien sûr : $f\left(\frac{n}{2}\right)=E\left(2\times\frac{n}{2}\right)=E(n)=n$.

Pour tout réel *x* dans $\left]\frac{n}{2}-\frac{1}{2};\frac{n}{2}\right[$, on a : $n-1<2x<n$ et donc $f(x)=E(2x)=n-1$. On en déduit alors : $\lim\limits_{x\to\frac{n}{2},x<\frac{n}{2}} f(x)=n-1$.

Pour tout réel *x* dans $\left]\frac{n}{2};\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right[$, on a : $n<2x<n+1$ et donc $f(x)=E(2x)=n$. On en déduit alors : $\lim\limits_{x\to\frac{n}{2},x>\frac{n}{2}} f(x)=n$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to\frac{n}{2},x<\frac{n}{2}} f(x)=n-1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{n}{2},x>\frac{n}{2}} f(x)=f\left(\frac{n}{2}\right)=n$.

Les limites à gauche et à droite de $\frac{n}{2}$ étant différentes, la fonction *f* est discontinue en cette valeur.

La fonction *f* est discontinue pour tout *x* de la forme $\frac{n}{2}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

En guise de complément, précisons que la fonction *f* est constante, donc continue, sur tout intervalle de la forme $\left[\frac{n}{2};\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right[$.

N°26 page 52

On considère la fonction *f* définie sur $[-1;2[$ par :

$$f(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$$

a) Pour tout *x* réel de l'intervalle $[-1;0[$, on a : $E(x)=-1$ d'où :

$$f(x)=-1+\left(x-(-1)\right)^2=-1+(x+1)^2=\boxed{x^2+2x}$$

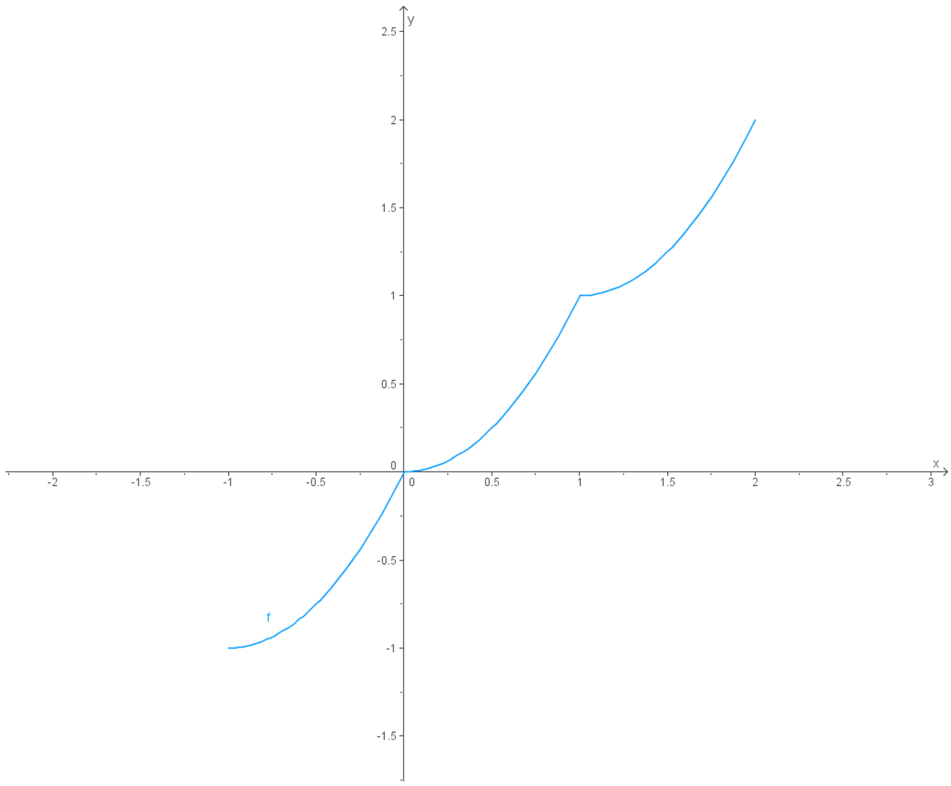
Pour tout x réel de l'intervalle $[0;1[$, on a : $E(x)=0$ d'où :

$$f(x)=0+(x-0)^2=\boxed{x^2}$$

Pour tout x réel de l'intervalle $[1;2[$, on a : $E(x)=1$ d'où :

$$f(x)=1+(x-1)^2=\boxed{x^2-2x+2}$$

b) On obtient :



c) D'après la représentation graphique obtenue à la question précédente, il semblerait que la fonction f soit continue sur l'intervalle $[-1;2[$. Démontrons-le rigoureusement.

Sur chacun des intervalles $]-1;0[$, $]0;1[$ et $]1;2[$, la fonction f est une fonction polynôme de degré 2, donc continue.

Il nous faut donc étudier la continuité de f en -1, 0 et 1. D'après la question a), la fonction f est continue <u>à droite</u> en chacune de ces valeurs et on a :

$$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=1-2=-1$$
$$f(0)=0^2=0$$
$$f(1)=1^2-2\times1+2=1-2+2=1$$

La fonction *f* n'étant pas définie à gauche en -1, il n'y a pas lieu d'étudie la continuité … à gauche en cette valeur !

Sur l'intervalle $[-1;0[$, on a : $f(x) = x^2 + 2x$.
On en déduit facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0^2 + 2\times 0 = 0$.
On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$. La fonction *f* est continue en 0.

Sur l'intervalle $[0;1[$, on a : $f(x) = x^2$.
On en déduit facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 1^2 = 1$.
On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1)$. La fonction *f* est continue en 1.

Finalement :

La fonction *f* est continue sur l'intervalle $[-1;2[$.

N°30 page 52

On considère la fonction f définie sur $[-3;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$$

La fonction *f* est la somme des fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \sqrt{x+3}$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, à fortiori sur $[-3;+\infty[$, en tant que fonction polynôme.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est la composée des fonctions $x \mapsto x+3$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
La fonction $x \mapsto x+3$ est continue sur $\mathbb{R}$, à fortiori sur $[-3;+\infty[$, en tant que fonction polynôme. Lorsque x varie dans $[-3;+\infty[$, $x+3$ varie dans $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, la fonction racine carrée est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, elle y est donc continue. Finalement la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue sur l'intervalle $[-3;+\infty[$.

En tant que somme de deux fonctions continues sur l'intervalle $[-3;+\infty[$, la fonction *f* y est également continue.

La fonction *f* est continue sur l'intervalle $[-3;+\infty[$.

N°32 page 52

On considère la fonction f définie sur $\text{D} = [-1;0[\cup]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

a) On utilise l'expression conjuguée de $\sqrt{1+x}-1$, savoir $\sqrt{1+x}+1$. Il vient alors, pour tour réel x de D :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{1+x}^2-1^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x \in \text{D},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}$$

b) A l'aide de la question précédente, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}}$$

Remarque : en étant un peu attentif(ve), on peut obtenir ce résultat en considérant la fonction h définie sur $[-1;+\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x+1}$. Cette fonction est dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ et on a : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La limite cherchée peut alors se calculer comme suit :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

On retrouve bien sûr le résultat obtenu précédemment.

c) On a $g(0)=\lambda$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$. La fonction g sera donc continue en 0 si, et seulement si on a : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$, c'est-à-dire $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

La fonction *g* est continue en 0 pour $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

N°37 page 53

On considère la fonction polynôme définie par : $f(x)=x^4-4x^2-x+1$.

$f(-2)=(-2)^4-4\times(-2)^2-(-2)+1=16-16+2+1=3$ → $\boxed{f(-2)=3}$

$f(-1)=(-1)^4-4\times(-1)^2-(-1)+1=1-4+1+1=-1$ → $\boxed{f(-1)=-1}$

$f(0)=0^4-4\times 0^2-0+1=1$ → $\boxed{f(0)=1}$

$f(1)=1^4-4\times 1^2-1+1=1-4-1+1=-3$ → $\boxed{f(1)=-3}$

$f(3)=3^4-4\times 3^2-3+1=81-36-3+1=43$ → $\boxed{f(3)=43}$

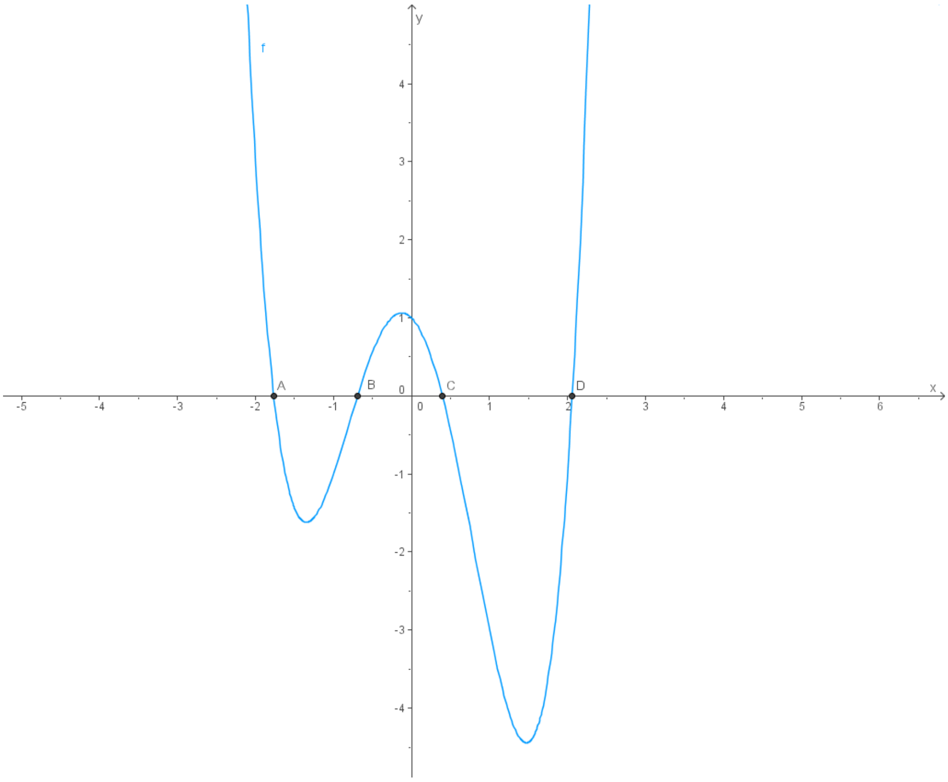
La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

Comme $f(-2)$ et $f(-1)$ sont de signes contraires, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe <u>au moins</u> un réel dans $]-2;-1[$ qui annule *f*.
On raisonne de la même façon avec $f(-1)$ et $f(0)$ puis $f(0)$ et $f(1)$ et enfin $f(1)$ et $f(2)$.
En définitive, on établit qu'il existe au moins quatre réels (dans $]-2;+3[$) qui annulent *f*.
Or, d'après l'énoncé, on admet qu'il existe <u>au plus</u> quatre valeurs qui annulent *f*.

On déduit finalement :

Il existe exactement quatre réels qui annulent *f*.

A titre de complément, nous fournissons ci-après la courbe représentative de la fonction *f* en ayant fait apparaître ses quatre points d'intersection A, B, C et D, avec l'axe des abscisses.



N°39 page 53

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^5 - 3x^3 + 4$.

a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^5 - 3x^3 + 4) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = \boxed{+\infty}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ équivaut à : pour tout réel *M*, il existe un réel *A* tel que $x \geq A$ entraîne $f(x) > M$. En particulier, pour $M = 1$, on peut affirmer qu'il existe un réel *A* tel que : $x \geq A$ entraîne $f(x) > 1$.

La définition en tant que telle ne donne pas le signe de *A*. Pour autant, on a deux situations possibles : si $A > 0$ … tout va bien ! Si $A \leq 0$, on sait que pour tout réel x supérieur à A, $f(x)$ sera supérieur à 1. Ceci restera encore vrai si on considère un réel A' strictement positif puisque $x \geq A'$ entraîne $x \geq A$ et donc, encore, $f(x) > 1$.

En définitive :

Il existe un réel *A* strictement positif tel que : $x \geq A$ entraîne $f(x) > 1$.

b) On a cette fois : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^5 - 3x^3 + 4) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = \boxed{-\infty}$.

Or, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ équivaut à : pour tout réel *M*, il existe un réel *B* tel que $x \le B$ entraîne $f(x) < M$. En particulier, pour $M = -1$, on peut affirmer qu'il existe un réel *B* tel que : $x \le B$ entraîne $f(x) < -1$.

Comme précédemment, nous n'avons pas d'information, à ce stade, sur le signe de *B*. On peut cependant raisonner de façon analogue (nous ne redétaillons pas le raisonnement) et conclure finalement :

Il existe un réel *B* strictement négatif tel que : $x \ge B$ entraîne $f(x) < -1$.

c) En tant que fonction polynôme, la fonction *f* est continue. D'après les questions précédentes, on a : $f(B) < -1$ et $f(A) > 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer qu'il existe au moins un réel α dans l'intervalle $]B, A[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Par ailleurs, toujours d'après les questions précédentes, on a :

- $\forall x \in]-\infty, B],\ f(x) < -1$;
- $\forall x \in [A, +\infty[,\ f(x) > 1$.

On en déduit que la fonction *f* ne s'annule pas sur les intervalles $]-\infty, B]$ et $[A, +\infty[$: toutes les racines de la fonction polynôme *f* sont donc dans l'intervalle $]B, A[$.

Finalement :

La fonction polynôme *f* s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]B, A[$
et toutes ses racines se trouvent dans cet intervalle.

N°41 page 53

Rappelons que la partie entière $\mathrm{E}(x)$ d'un réel x donné est l'unique entier tel que :

$$\mathrm{E}(x) \le x < \mathrm{E}(x) + 1$$

Cette définition va nous permettre de résoudre rapidement les équations proposée.

a) $\mathrm{E}(x) = 1 \Leftrightarrow 1 \le x < 1+1 \Leftrightarrow 1 \le x < 2 \Leftrightarrow x \in [1;2[$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\mathrm{E}(x) = 1$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = [1;2[}$$

b) $\mathrm{E}(x)=-1 \Leftrightarrow -1\le x<-1+1 \Leftrightarrow -1\le x<0 \Leftrightarrow x\in[-1;0[$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\mathrm{E}(x)=-1$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}=[-1;0[}$$

c) L'équation $\mathrm{E}(x)=\frac{1}{3}$ n'admet pas de solutions puisque la partie entière d'un réel est un nombre entier. Il n'existe donc pas de réel dont la partie entière est égale à $\frac{1}{3}$ …

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\mathrm{E}(x)=\frac{1}{3}$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}=\varnothing}$$

N°46 page 53

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$$

a) La fonction *f* est dérivable en tant que fonction polynôme et on a pour tout *x* réel :

$$\begin{aligned} f'(x)&=4\times 3x^3-3\times 8x^2-2\times 6x+24\\ &=12\left(x^3-2x^2-x+2\right)\end{aligned}$$

Pour tout *x* réel, on a également :

$$\begin{aligned}(x-2)\left(x^2-1\right)&=x^3-x-2x^2+2\\ &=x^3-2x^2-x+2\end{aligned}$$

On a bien, pour tout *x* réel :

$$\boxed{f'(x)=12(x-2)\left(x^2-1\right)}$$

b) D'après ce qui précède, on a, pour tout *x* réel :

$$f'(x)=12(x-2)(x-1)(x+1)$$

On construit alors facilement le tableau de signe :

x		-1		1		2	
$x+1$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$f'(x)$	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**

On en déduit que la fonction *f* est :

- Strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;2\right]$;
- Strictement croissante sur $\left[-1;1\right]\cup\left[2;+\infty\right[$.

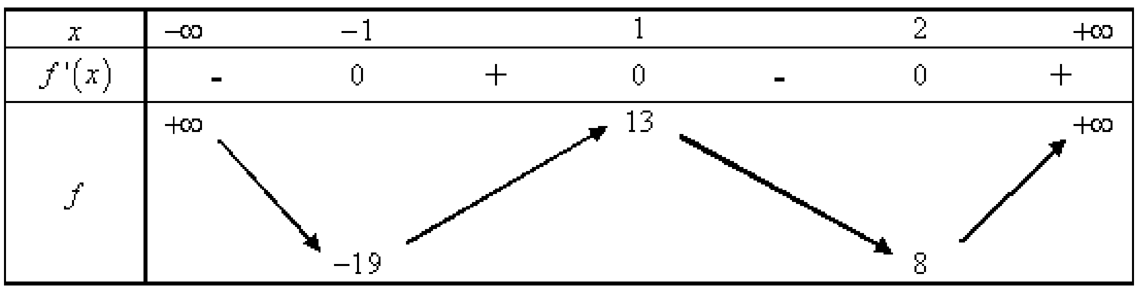
On a :

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3\times(-1)^4-8\times(-1)^3-6\times(-1)^2+24\times(-1) \\ &= 3+8-6-24=\boxed{-19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3\times1^4-8\times1^3-6\times1^2+24\times1 \\ &= 3-8-6+24=\boxed{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 3\times2^4-8\times2^3-6\times2^2+24\times2 \\ &= 3\times16-8\times8-6\times4+48 \\ &= 48-64-24+48=\boxed{8} \end{aligned}$$

On tire des éléments précédents le tableau de variation demandé :



c) La fonction *f* est une fonction continue en tant que fonction polynôme.
Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-1\right]$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[-19;+\infty\right[$.

Or, $0 \in \left[-19;+\infty\right[$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure qu'il existe un unique réel α dans $\left]-\infty;-1\right[$ tel que $f\left(\alpha\right)=0$.

On raisonne de façon similaire sur l'intervalle $\left[-1;1\right]$.

La fonction *f* y est continue et strictement croissante.
Par ailleurs : $f\left(-1\right)=-19<0$ et $f\left(1\right)=13>0$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure qu'il existe un unique réel β dans $\left]-1;1\right[$ tel que $f\left(\beta\right)=0$.
En observant un peu attentivement $f\left(x\right)$ on constate que $f\left(0\right)=0$. On en déduit alors immédiatement : $\beta=0$.

Sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$ la fonction *f* admet un minimum en 2 et ce minimum vaut $f\left(2\right)=8>0$. La fonction *f* ne s'annule donc pas sur $\left[1;+\infty\right[$.

En définitive :

La fonction *f* s'annule exactement en deux valeurs α et β. On a : $\alpha \in \left]-\infty;-1\right[$ et $\beta=0$ (d'où $\alpha<\beta$).

d) On calcule :

$$\begin{aligned} f\left(-2\right) &= 3\times\left(-2\right)^4-8\times\left(-2\right)^3-6\times\left(-2\right)^2+24\times\left(-2\right) \\ &= 3\times16+8\times8-6\times4-48 \\ &= 48+64-24-48=\boxed{40} \end{aligned}$$

Comme $f\left(-1\right)=-19<0$ et $f\left(-2\right)=40>0$, on peut affirmer que le réel α appartient à l'intervalle $\left]-2;-1\right[$.

En tabulant la fonction *f* sur cet intervalle avec un pas de 0,1 on obtient :

$$f\left(-1,7\right)=6,2203 \text{ et } f\left(-1,6\right)=-1,3312$$

D'où : $-1,7<\alpha<-1,6$.

En tabulant alors la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-1,7;-1,6\right[$, on obtient :

$$f\left(-1,62\right)=0,048\ 250\ 08 \text{ et } f\left(-1,61\right)=-0,649\ 404\ 77$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{-1,62 < \alpha < -1,61}$$

N°47 page 54

1. On considère la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Elle y est continue (la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$).
   Sa dérivée est la fonction cosinus qui prend des valeurs positives sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. En particulier, elle s'annule seulement en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$. La fonctions sinus est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
   Enfin, on a : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
   Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer :

   Pour tout *k* dans $[-1;1]$ il existe un unique réel x_0 dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x_0 = k$.

2. Avec $k=\frac{1}{3}$, on obtient à la calculatrice : $\boxed{x_0 \simeq 0,340}$ à 10^{-3} près.

N°49 page 54

Considérons la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$$

La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ en tant que fonction polynôme et on a, pour tout réel *x* de cet intervalle :

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Pour tout réel x positif et, à fortiori, pour tout réel *x* de l'intervalle $[0;1]$, on a :

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \geq 1 > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;1\right]$.

Enfin, on a facilement : $f\left(0\right)=0$ et $f\left(1\right)=5$. On a donc : $f\left(0\right)<1<f\left(5\right)$.

On a d onc :

- La fonction *f* est continue sur l'intervalle $\left[0;1\right]$;
- La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;1\right]$;
- $f\left(0\right)<1<f\left(5\right)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure :

L'équation $f\left(x\right)=1$ admet une solution unique sur l'intervalle $\left[0;1\right]$.

N°51 page 54

1. La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-2\right]$. On en déduit, pour tout *x* réel dans cet intervalle : $f\left(x\right)\leq f\left(-2\right)$, c'est-à-dire : $f\left(x\right)\leq 4$.

   Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$. Cette limite et la croissante stricte nous permette d'écrire : $f\left(x\right)>1$.

   Finalement, pour tout *x* de $\left]-\infty;-2\right]$, on a $f\left(x\right)$ dans $\left]1;4\right]$. La fonction *f* ne s'annule donc pas sur $\left]-\infty;-2\right]$.

   La fonction *f* est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-2;-1\right[$. Elle prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]-\infty;4\right]$ auquel appartient 0.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $\left]-2;-1\right[$ tel que $f\left(\alpha\right)=0$.

   Sur l'intervalle $\left]-1;1\right]$ la fonction f est strictement décroissante et prend ses valeurs dans $\left[1;+\infty\right[$. Elle ne s'annule donc pas.

   Sur l'intervalle $\left[1;2\right]$ la fonction *f* est continue et strictement décroissante. On a : $f\left(1\right)=1>0$ et $f\left(2\right)=-1<0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un unique réel β dans $]1;2[$ tel que $f(\beta)=0$.

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, la fonction *f* est strictement croissante. Pour tout x de cet intervalle, on a donc : $f(x)\geq f(2)$, c'est-à-dire $f(x)\geq -1$. Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Cette limite et la croissance stricte nous permette d'écrire : $f(x)<0$.

Finalement, pour tout *x* de $[2;+\infty[$, on a $f(x)$ dans $]-1;0[$. La fonction *f* ne s'annule donc pas sur $[2;+\infty[$.

En résumé :

La fonction *f* s'annule deux fois sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.

2. D'après ce qui précède :

$$\boxed{\begin{array}{c}-2<\alpha<-1\\ 1<\beta<2\end{array}}$$

N°53 page 54

1. a) Le triangle OAB est un triangle isocèle en O. On a $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{R}$. Notons H le pied de la hauteur issue de O. L'aire cherchée s'écrit alors : $\mathcal{A}_1=\frac{1}{2}\mathrm{OH}\times\mathrm{AB}$.

   La droite (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

   On a facilement : $\mathrm{OH}=\mathrm{OB}\times\cos\frac{x}{2}=\mathrm{R}\times\cos\frac{x}{2}$ et $\frac{\mathrm{AB}}{2}=\mathrm{OB}\times\sin\frac{x}{2}=\mathrm{R}\times\sin\frac{x}{2}$.

   Il vient alors :

$$\mathcal{A}_1=\frac{1}{2}\mathrm{OH}\times\mathrm{AB}=\mathrm{R}^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{R}^2\sin x$$

$$\boxed{\mathcal{A}_1=\frac{1}{2}\mathrm{R}^2\sin x}$$

   b) L'aire de la partie rouge sur la figure correspond à la différence entre l'aire du secteur OAB et celle du triangle OAB qui vient d'être calculée.

On a donc : $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}x\mathrm{R}^2 - \mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}x\mathrm{R}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \sin x = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\left(x - \sin x\right)$.

$$\boxed{\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\left(x - \sin x\right)}$$

c) L'égalité $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ équivaut à $\frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \sin x = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\left(x - \sin x\right)$, soit : $\sin x = x - \sin x$.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{x}{2}}$$

2. a) Considérons la fonction *f* définie sur $\left]0;\pi\right[$ par : $f\left(x\right) = \frac{x}{2} - \sin x$.

La fonction *f* est dérivable sur $\left]0;\pi\right[$ comme différence de deux fonctions dérivables (une fonction linéaires et la fonction sinus) sur cet intervalle et on a, pour tout *x* de $\left]0;\pi\right[$:

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{2} - \cos x$$

Dans cet intervalle, la fonction cosinus est strictement décroissante et prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{3}$.

On a alors :

- Pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{3}\right[$, $f'\left(x\right) < 0$ et la fonction *f* est strictement décroissante ;
- Pour $x \in \left]\frac{\pi}{3};\pi\right[$, $f'\left(x\right) > 0$ et la fonction *f* est strictement croissante.

On a, par ailleurs :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(x\right) = \frac{0}{2} - \sin 0 = 0,\ \lim_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} f\left(x\right) = \frac{\pi}{2} - \sin \pi = \frac{\pi}{2} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{3}\right[$, la fonction *f* est strictement décroissante et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(x\right) = 0$. On en déduit : $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{3}\right[,\ f\left(x\right) < 0$.

La valeur minimale de *f* est atteinte pour $x=\dfrac{\pi}{3}$ et on a : $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$.

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right[$, la fonction *f* est continue et strictement croissante.

Par ailleurs, on a : $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x)=\dfrac{\pi}{2}>0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer qu'il existe un unique réel α dans $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right[$ tel que $f(\alpha)=0$.

Le réel α est donc le seul réel de l'intervalle $]0;\pi[$ vérifiant $f(\alpha)=0$.

Comme $f(x)=0$ équivaut à $\dfrac{x}{2}=\sin x$, on peut finalement conclure :

Il existe un unique réel α dans $]0;\pi[$ solution de l'équation $\dfrac{x}{2}=\sin x$.

b) En tabulant la fonction *f* avec un pas de 0,1 on obtient d'abord :

$$1{,}8<\alpha<1{,}9$$

Puis, avec un pas de 0,01 :

$$\boxed{1{,}89<\alpha<1{,}90}$$

N°64 page 57

1. a) Pour le rectangle initial, on a : $x=\dfrac{L}{\ell}$. Comme $L\geq\ell>0$, on a : $\dfrac{L}{\ell}\geq 1>0$. Soit $x\geq 1$.

   Les dimensions du rectangle plié sont : ℓ et $\dfrac{L}{2}$.

   On ne peut, sans discuter, préciser laquelle de ces deux dimensions est la largeur !

- Si $\frac{L}{2} \geq \ell$ alors la largeur du rectangle plié est ℓ et on a : $f(x) = \frac{\frac{L}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}\frac{L}{\ell} = \frac{1}{2}x$.

  Mais $\frac{L}{2} \geq \ell \Leftrightarrow \frac{L}{\ell} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$;

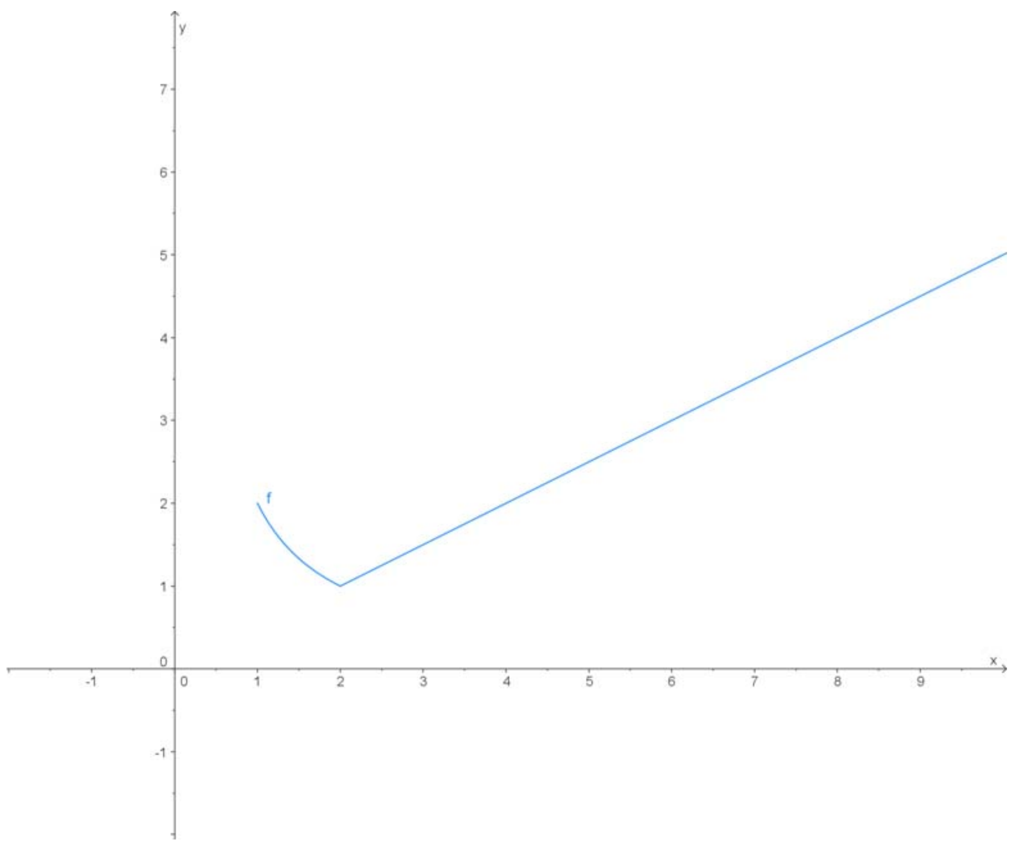
- Si $\frac{L}{2} < \ell$ alors la largeur du rectangle plié est $\frac{L}{2}$ et on a : $f(x) = \frac{\ell}{\frac{L}{2}} = 2\frac{1}{\frac{L}{\ell}} = 2\frac{1}{x}$.

  Mais $\frac{L}{2} < \ell \Leftrightarrow \frac{L}{\ell} < 2 \Leftrightarrow x < 2$.

En définitive :

- Si $1 \leq x < 2$ alors $f(x) = \frac{2}{x}$;
- Si $x \geq 2$ alors $f(x) = \frac{1}{2}x$.

b) On obtient :



La fonction f est continue sur l'intervalle $[1;2[$ en tant que fonction rationnelle et on a facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\dfrac{2}{2}=1$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $]2;+\infty[$ en tant que fonction linéaire et on a :
$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\dfrac{2}{2}=1=f(2)$.

Comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=f(2)$, on peut conclure que la fonction f est continue en $x=2$.

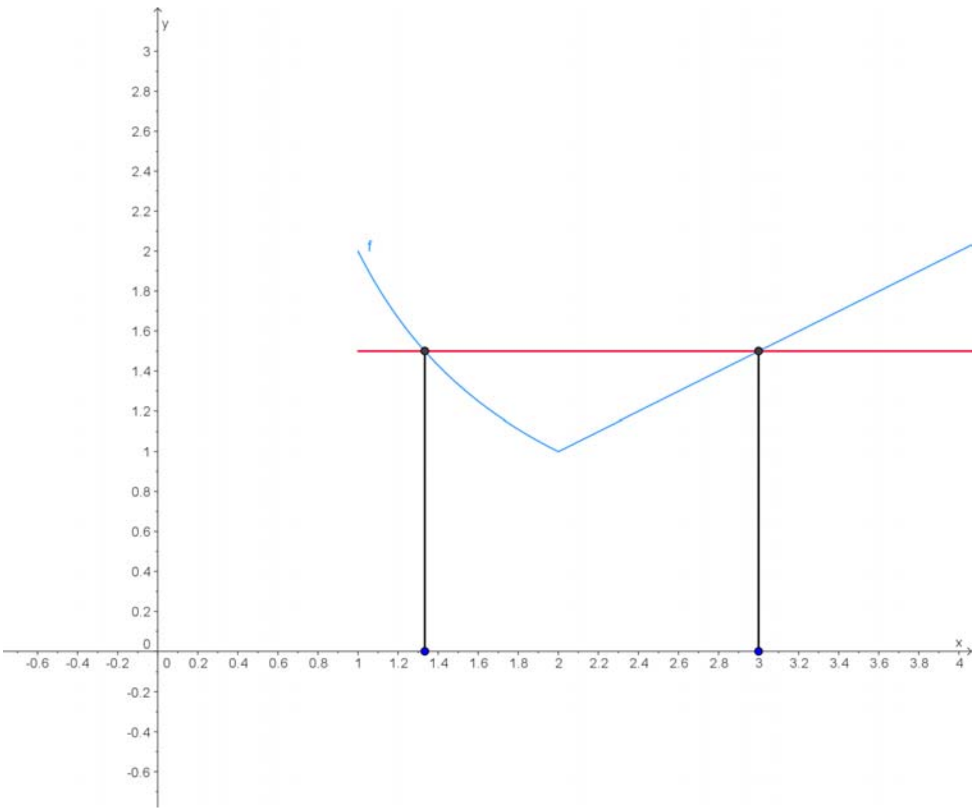
La fonction f est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

c) Sur l'intervalle $[1;2[$, $f(x)=1,5=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 3x=4\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$.

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, $f(x)=1,5=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=3$.

Les solutions de l'équation $f(x)=1,5$ sont : $\dfrac{4}{3}$ et 3.

La figure ci-dessous est fournie à titre de complément :



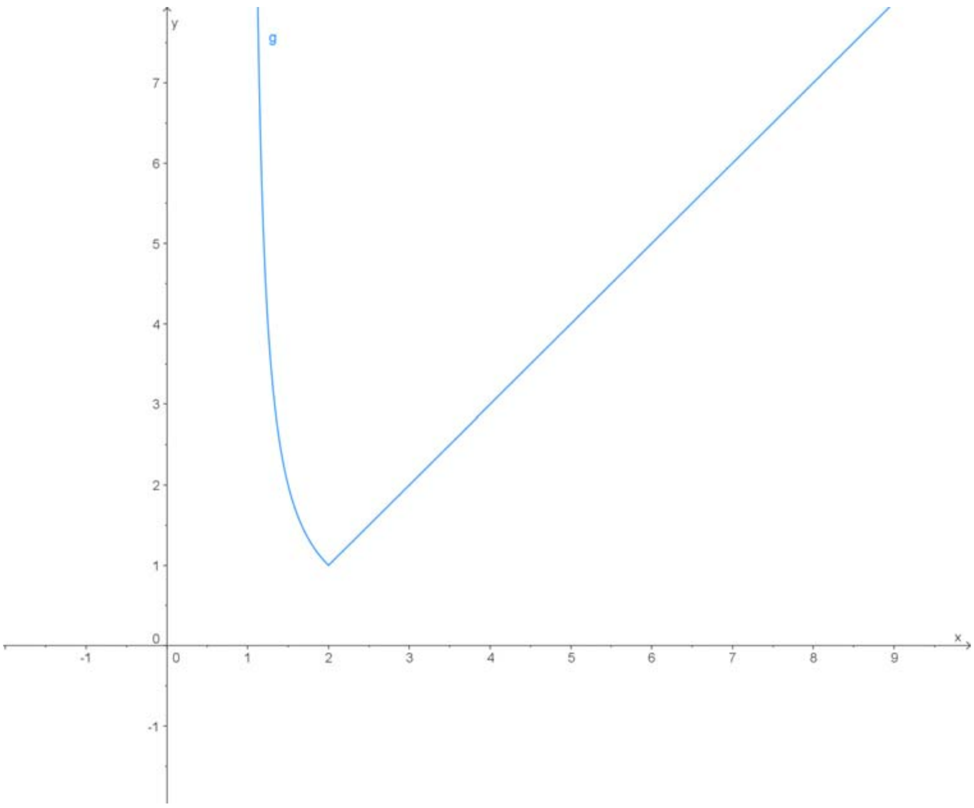
2. a) Les dimensions du rectangle plié sont cette fois : ℓ et $L-\ell$. Comme précédemment, nous devons distinguer deux situations :

   - Si $L-\ell \geq \ell$ alors la largeur du rectangle plié est ℓ et on a :
     $g(x)=\dfrac{L-\ell}{\ell}=\dfrac{L}{\ell}-1=x-1$. Mais $L-\ell \geq \ell \Leftrightarrow L \geq 2\ell \Leftrightarrow \dfrac{L}{\ell} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$;
   - Si $L-\ell < \ell$ alors la largeur du rectangle plié est $L-\ell$ et on a ($x>1 \Rightarrow L \neq \ell$) :
     $g(x)=\dfrac{\ell}{L-\ell}=\dfrac{1}{\dfrac{L-\ell}{\ell}}=\dfrac{1}{x-1}$. Mais $L-\ell < \ell \Leftrightarrow L < 2\ell \Leftrightarrow \dfrac{L}{\ell} < 2 \Leftrightarrow x < 2$.

   En définitive :

   - Si $1 < x < 2$ alors $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;
   - Si $x \geq 2$ alors $f(x)=x-1$.

   b) On obtient :



La fonction g est continue sur l'intervalle $]1;2[$ en tant que fonction rationnelle et on a facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} g(x)=\dfrac{1}{2-1}=1$.

La fonction g est continue sur l'intervalle $]2;+\infty[$ en tant que fonction affine et on a facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x)=g(2)=2-1=1$.

Comme : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x)=g(2)$, on conclut que la fonction g est continue en $x=2$.

Finalement :

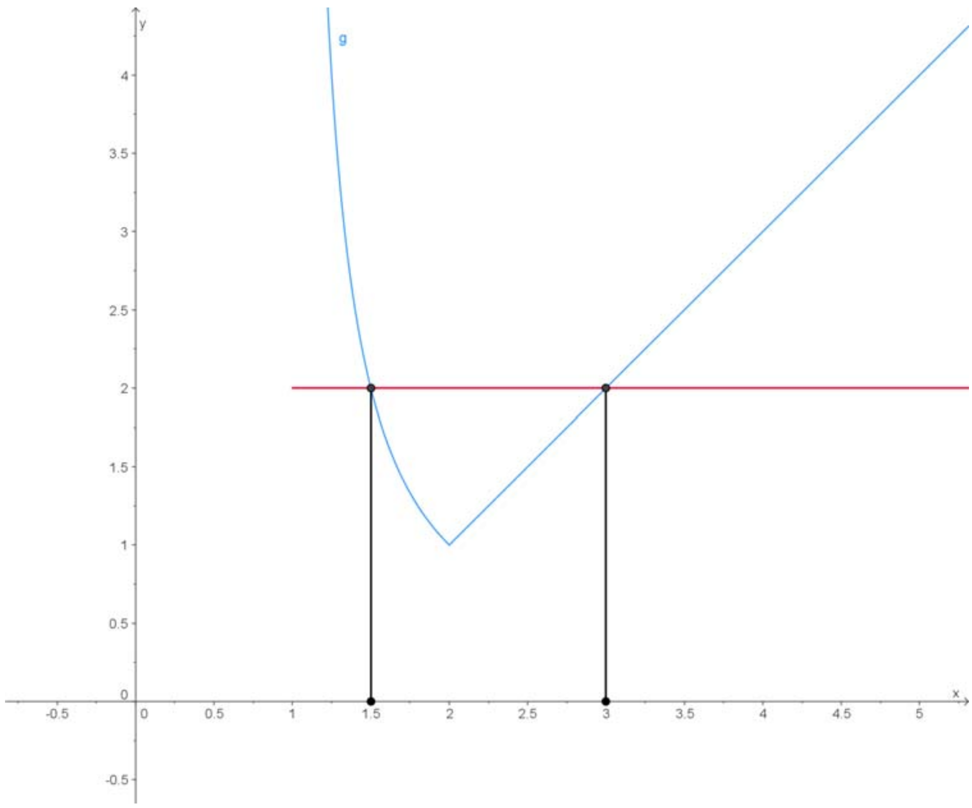
La fonction g est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

c) Sur l'intervalle $[1;2[$, $g(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, $g(x)=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$.

Les solutions de l'équation $g(x)=2$ sont : $\dfrac{3}{2}$ et 3.

La figure ci-dessous est fournie à titre de complément :

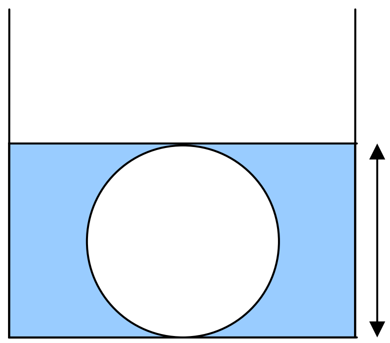


N°67 page 58

1. Le cylindre a pour base un disque de rayon 1 dm, c'est-à-dire un disque de diamètre 2 dm. Si l'on souhaite y introduire une bille de diamètre *d* dm, il faut que ce diamètre soit strictement inférieur à celui de la base du disque, c'est-à-dire que l'on ait $d<2$.
   Par ailleurs, la bille n'étant pas réduite à un point (!), on a $d>0$.
   En définitive, on a bien :

   $$\boxed{0<d<2}$$

   La situation correspondant au niveau de l'eau tangent à la bille est illustrée par la figure ci-dessous (on a en fait fourni une coupe par un plan vertical passant par le centre de la base du cylindre) :

   Le volume total (eau + bille) est égal à $\pi\times 1^2\times d=\pi\times d$.
   Or, le volume de la bille est égal à : $\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{\pi\times d^3}{6}$ et le volume d'eau initial est égal à : $\pi\times 1^2\times 0,5=\pi\times 1^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$.
   On a donc l'égalité : $\pi\times d=\frac{\pi\times d^3}{6}+\frac{\pi}{2}$, soit, en simplifiant : $6d=d^3+3$.
   On obtient bien l'équation cherchée :

   $$\boxed{d^3-6d+3=0}$$

2. a) Considérons la fonction *f* définie sur l'intervalle $\left[0;2\right]$ par : $f\left(x\right)=x^3-6x+3$.
   En tant que fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur cet intervalle.
   On a facilement : $f\left(x\right)=3x^2-6=3\left(x^2-2\right)=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.
   Il vient alors :
   - Pour tout *x* réel dans $\left[0;\sqrt{2}\right[$, $f'\left(x\right)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante ;
   - Pour tout *x* réel dans $\left[\sqrt{2};2\right[$, $f'\left(x\right)>0$ et la fonction *f* est strictement croissante.

La fonction *f* admet donc un minimum pour $x=\sqrt{2}$ et on a :

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}^3-6\sqrt{2}+3=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3=-4\sqrt{2}+3$$

D'où : $f\left(\sqrt{2}\right)<0$.

Par ailleurs, $f\left(0\right)=0^3-6\times 0+3=3$. D'où : $f\left(0\right)>0$.

En définitive :

- La fonction *f* est continue sur l'intervalle $\left[0;\sqrt{2}\right]$;
- La fonction *f* est strictement décroissante sur $\left[0;\sqrt{2}\right]$;
- $f\left(0\right)>0$ et $f\left(\sqrt{2}\right)<0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction *f* s'annule pour une seule valeur de *x*, que nous notons α, de l'intervalle $\left]0;\sqrt{2}\right[$.

1. En tabulant la fonction *f* sur l'intervalle $\left[0;1,5\right]$ avec un pas de 0,1 on obtient : $f\left(0,5\right)>0$ et $f\left(0,6\right)<0$. On en déduit :

$$0,5<\alpha<0,6$$

En tabulant alors la fonction f sur l'intervalle $\left[0,5;0,6\right]$ avec un pas de 0,01 on obtient : $f\left(0,52\right)>0$ et $f\left(0,53\right)<0$. On en déduit :

$$0,52<\alpha<0,53$$

Le diamètre de la bille pour lequel le niveau de l'eau lui est tangent est compris entre 0,52 et 0,53 décimètre.

N°71 page 58

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right)=\left[x-E\left(x\right)\right]\left[x-E\left(x\right)-1\right]$$

a) Pour tout x réel, on a : $E(x+1)=E(x)+1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left[x+1-E(x+1)\right]\left[x+1-E(x+1)-1\right] \\ &= \left[x+1-E(x)-1\right]\left[x+1-E(x)-1-1\right] \\ &= \left[x-E(x)\right]\left[x-E(x)-1\right] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1)=f(x)}$$

b) Voir page suivante.

c) D'après le graphique obtenu à la question précédente, la fonction f semble continue. Nous allons le démontrer rigoureusement.

L'expression de $f(x)$ (faisant apparaître la fonction partie entière) suggère que l'on distingue deux types de valeur de x : les valeurs entières et les valeurs non entières.

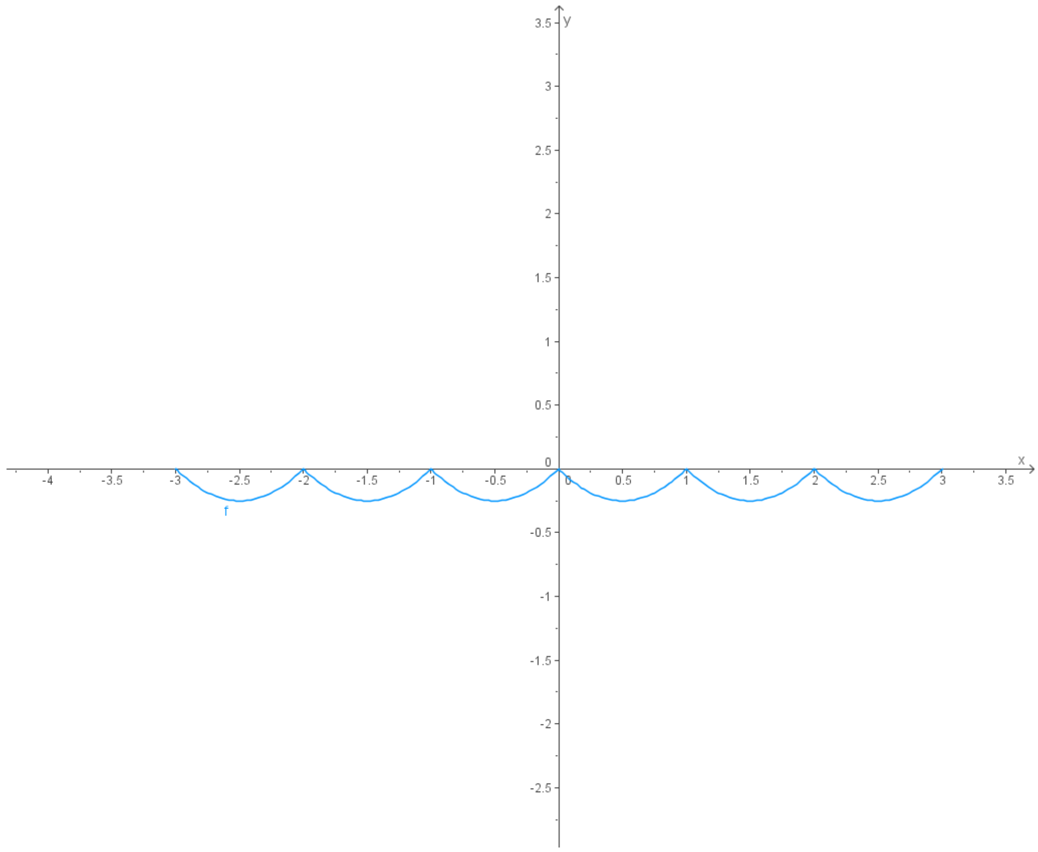
On a donc, en considérant une valeur réelle a :

- Si $a \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

  Dans ce cas, on peut écrire : $E(a) < a < E(a)+1$

  Pour étudier la continuité de f en a, nous allons nous restreindre à l'intervalle $I_a = \left]E(a);E(a)+1\right[$.

  Pour tout x de cet intervalle, on a immédiatement : $E(a) < x < E(a)+1$ et, de fait : $E(x)=E(a)$.



On peut alors écrire, pour tout réel *x* de l'intervalle I_a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x - E(x)\right]\left[x - E(x) - 1\right] \\ &= \left[x - E(a)\right]\left[x - E(a) - 1\right] \\ &= x^2 - \left[2E(a) + 1\right]x + E(a)\left[E(a) + 1\right] \end{aligned}$$

La restriction de la fonction *f* à l'intervalle I_a est ainsi une fonction polynôme de degré 2. Elle y est donc continue en tout point.

- Si $a \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas on a $E(a) = a$ et, immédiatement : $f(a) = 0$.

Il convient maintenant d'étudier les limites à gauche et à droite de *f* en *a*.

Pour déterminer la limite à gauche de *f* en *a*, nous allons considérer l'intervalle $\left[a - 1; a\right[$.

Pour tout réel x de cet intervalle, on a : $E(x)=a-1$ et donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x-E(x)\right]\left[x-E(x)-1\right] \\ &= \left[x-(a-1)\right]\left[x-(a-1)-1\right] \\ &= (x-a+1)(x-a) \end{aligned}$$

On en tire alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\left[(x-a+1)(x-a)\right]=0$ (du fait du second facteur).

De façon similaire, on considère ensuite l'intervalle $\left[a;a+1\right[$. Pour tout réel x de cet intervalle, on a $E(x)=a$ et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x-E(x)\right]\left[x-E(x)-1\right] \\ &= (x-a)(x-a-1) \end{aligned}$$

On en tire alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\left[(x-a)(x-a-1)\right]=0$ (du fait du premier facteur).

En définitive, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a)=0$.

On en conclut que la fonction f est continue en a.

On déduit des deux résultats obtenus :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

N°72 page 58

Pour tout entier $n\geq 1$, on considère la fonction polynôme P_n définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)=x^{n+1}-2x^n+1$$

En tant que fonction polynôme, P_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a facilement :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P_n'(x)=(n+1)x^n-2nx^{n-1}=x^{n-1}\left[(n+1)x-2n\right]$$

Pour tout entier $n\geq 1$ et tout réel x strictement positif, on a : $x^{n-1}>0$.

Par ailleurs, $(n+1)x-2n>0$ équivaut à $x>\dfrac{2n}{n+1}$.

On déduit de ce qui précède que l'on a $P_n'(x) > 0$ pour tout réel *x* de l'intervalle $\left]\frac{2n}{n+1};2\right[$.

La fonction P_n est donc strictement croissante sur $\left]\frac{2n}{n+1};2\right[$.

Continuité, monotonie stricte … Voici quelques ingrédients qui nous conduisent à explorer la piste du théorème des valeurs intermédiaires !

Pour tout entier naturel *n* non nul on a :

$$P_n(2) = 2^{n+1} - 2\times 2^n + 1 = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 1 > 0$$

Pour pouvoir établir le résultat demandé, il convient maintenant d'établir : $P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

On peut calculer $P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)$:

$$\begin{aligned}
P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) &= \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n} + 1 \\
&= \frac{2^{n+1}n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} - \frac{2^{n+1}n^n}{(n+1)^n} + 1 \\
&= \frac{2^{n+1}n^{n+1} - 2^{n+1}n^n(n+1) + (n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{\cancel{2^{n+1}n^{n+1}} - \cancel{2^{n+1}n^{n+1}} - 2^{n+1}n^n + (n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{-2^{n+1}n^n + (n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\
&= -\frac{2^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}} + 1
\end{aligned}$$

L'étude du signe de $-\frac{2^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}} + 1$ requiert quelques outils dont nous ne disposons pas encore.

On peut remarquer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(1) = 1^{n+1} - 2\times 1^n + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. En d'autres termes, toutes les fonctions polynômes P_n s'annulent pour $x = 1$.

Pour $n=1$, on a $\frac{2n}{n+1}=\frac{2\times 1}{1+1}=1$ et la fonction polynôme P_1 s'annule bien pour cette valeur de *x*. Plus précisément, $P_1(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ et la fonction P_1 s'annule uniquement en $x=1$.

Supposons maintenant $n>1$.
On en déduit immédiatement $n+n>n+1$, soit $2n>n+1$, c'est-à-dire $\frac{2n}{n+1}>1$.
On va travailler sur l'intervalle $[1;2]$ (on remarque que $\frac{2n}{n+1}\in\,]1;2[$).

D'après l'étude du signe de la dérivée menée plus haut, on peut écrire :

- Sur $\left]1;\frac{2n}{n+1}\right]$ la dérivée P_n' est négative et s'annule en $\frac{2n}{n+1}$. On en déduit que la fonction P_n est strictement décroissante sur $\left]1;\frac{2n}{n+1}\right]$;
- Sur $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$ la dérivée P_n' est positive et s'annule en $\frac{2n}{n+1}$. On en déduit que la fonction P_n est strictement croissante sur $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$.

Comme la fonction P_n est strictement décroissante sur $\left]1;\frac{2n}{n+1}\right]$, on a : $P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)<P_n(1)$, soit, en tenant compte de $P_n(1)=0$: $P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$.

Résumons-nous. Sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$ on a :

- La fonction P_n est continue ;
- La fonction P_n est strictement croissante ;
- $P_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$ et $P_n(2)>0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors de conclure de la fonction polynôme P_n s'annule une unique fois sur l'intervalle $\left]\frac{2n}{n+1};2\right[$.