Fonction logarithme népérien

Corrigés d'exercices / Version de décembre 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 91 :	N°**5**, **6**	Page 100 :	N°**57**, **60**, **67**, **69**, **73**
Page 93 :	N°**13**	Page 101 :	N°**76**, **77**, **79**, **85**
Page 95 :	N°**17**, **19**	Page 105 :	N°**94**, **95**
Page 98 :	N°**29**, **31**, **33**, **36**, **37**, **39**	Page 108 :	N°**108**
Page 99 :	N°**45**, **47**, **49**, **55**	Page 109 :	N°**113**, **114**

N°5 page 91

a) L'argument de l'exponentielle ne pose aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{3x-1}=1 \Leftrightarrow 3x-1=\ln 1 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

L'équation admet une solution : $\frac{1}{3}$.

b) L'argument de l'exponentielle ne pose aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.
La fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives : e^{4x+2} ne peut donc être égal à -1.

L'équation n'admet pas de solution.

N°6 page 91

a) L'argument de l'exponentielle ne pose aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{0,1x^2}=1 \Leftrightarrow 0,1x^2=\ln 1 \Leftrightarrow 0,1x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

L'équation admet une solution : 0.

b) L'argument de l'exponentielle ne pose aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{1+x}=3 \Leftrightarrow 1+x=\ln 3 \Leftrightarrow x=\ln 3-1$$

L'équation admet une solution : $\ln 3-1$.

N°13 page 93

Malik se trompe !
En effet, avant de résoudre l'inéquation $\ln\left(x^2\right) > \ln x$, on doit chercher dans quel ensemble on cherche les éventuelles solutions.

- $\ln\left(x^2\right)$ existe si, et seulement si, $x^2 > 0$ c'est-à-dire si $x \neq 0$.
- $\ln x$ existe si, et seulement si, $x > 0$.

En définitive, les deux membres de l'inégalité existent si, et seulement si : $x > 0$.
On doit donc résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors, <u>pour tout *x* réel strictement positif</u> : $\ln x^2 > \ln x \Leftrightarrow x^2 > x$.
Cette dernière inéquation admet pour ensemble de solution dans $\mathbb{R}$: $\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$ mais comme nous devons uniquement retenir les solutions strictement positives, on en déduit finalement que l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x^2 > \ln x$ est l'intervalle : $\left]1\,;+\infty\right[$.

N°17 page 95

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\ln\left(4^3\right)+5\ln 2\\
&= -\ln\left[\left(2^2\right)^3\right]+5\ln 2\\
&= -\ln\left(2^{2\times 3}\right)+5\ln 2\\
&= -\ln\left(2^6\right)+5\ln 2\\
&= -6\ln 2+5\ln 2\\
&= -\ln 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{A} = -\ln 2}$$

N°19 page 95

Soit *t* le taux de diminution annuel moyen sur cette période. Nous le choisissons positif et introduisons en conséquence un signe « − » dans l'équation ci-après.
De 1979 à 2007, 28 années se sont écoulées et le taux cherché vérifie donc :

$$7,2\times\left(1-\frac{t}{100}\right)^{28} = 4,2$$

On a alors :

$$7,2\times\left(1-\frac{t}{100}\right)^{28}=4,2\Leftrightarrow\left(1-\frac{t}{100}\right)^{28}=\frac{4,2}{7,2}=\frac{42}{72}=\frac{7}{12}$$
$$\Leftrightarrow 28\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\ln\frac{7}{12}\Leftrightarrow\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{1}{28}\ln\frac{7}{12}$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=\exp\left(\frac{1}{28}\ln\frac{7}{12}\right)\Leftrightarrow\frac{t}{100}=1-\exp\left(\frac{1}{28}\ln\frac{7}{12}\right)$$
$$\Leftrightarrow t=100\left[1-\exp\left(\frac{1}{28}\ln\frac{7}{12}\right)\right]\simeq 1,9$$

La surface de la banquise du pôle nord a diminué en moyenne de 1979 à 2007 de $1-\exp\left(\frac{1}{28}\ln\frac{7}{12}\right)$% par an, soit environ 1,9% par an.

N°29 page 98

$\ln 7,39$ est le réel dont le l'exponentielle vaut 7,39.

Or, on nous donne $e^2\simeq 7,39$. On en déduit donc immédiatement : $\ln 7,39\simeq 2$.

A la calculatrice, on obtient : $\ln 7,39\simeq 2,000\,128$.

N°31 page 98

a) L'argument de l'exponentielle ne pose aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

On a : $e^{2x}=2\Leftrightarrow 2x=\ln 2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln 2\simeq 0,35$.

L'équation admet une solution : $\frac{1}{2}\ln 2\simeq 0,35$.

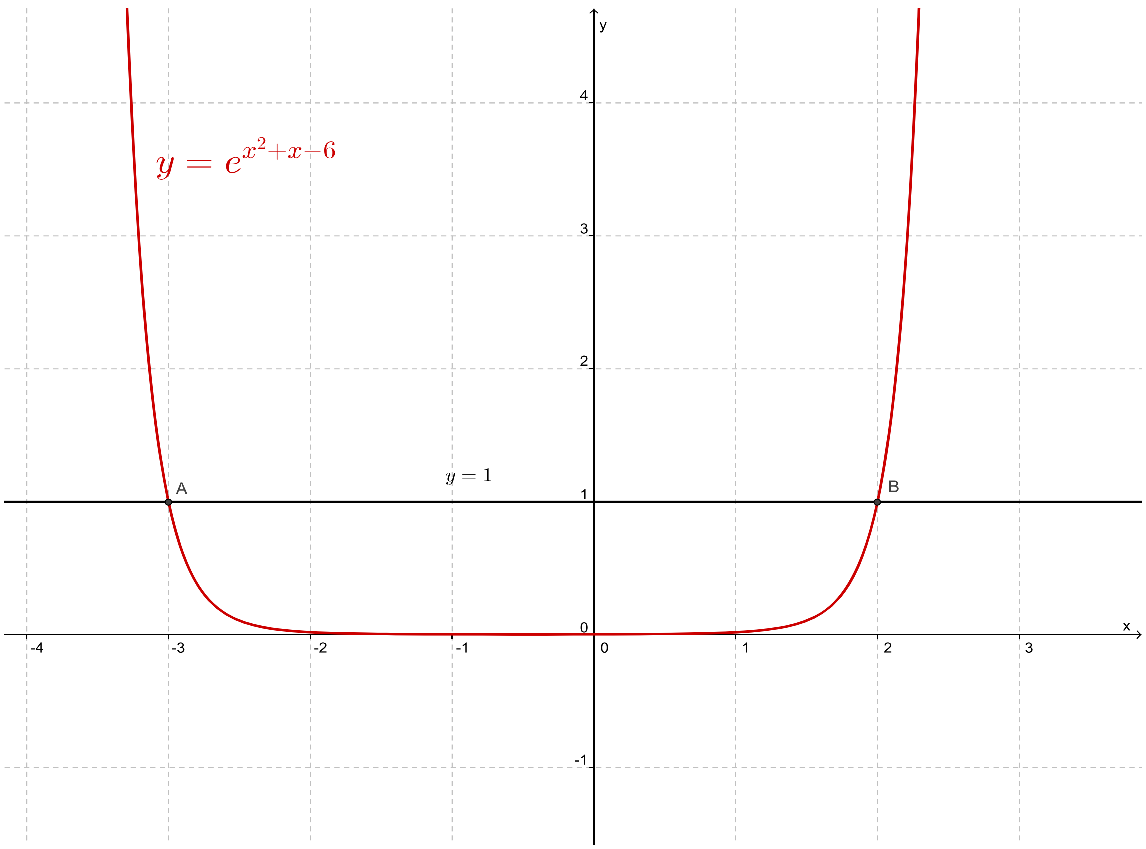
b) L'argument de l'exponentielle ne pose aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

On a : $e^{-x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\Leftrightarrow x=\ln 2\simeq 0,69$.

L'équation admet une solution : $\ln 2\simeq 0,69$.

N°33 page 98

a) D'après la figure fournie, l'équation $f(x)=1$ semble admettre 2 solutions (nombre de points d'intersection de la courbe représentative de la fonction *f* et de la droite d'équation $y=1$). Les abscisses de ces deux points semblent valoir -3 et 2 (cf. les points A et B ci-dessous).



b) On a :

$$f(x)=1 \Leftrightarrow e^{x^2+x-6}=1 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

On obtient une équation du second degré dont le déterminant associé vaut :

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 25$$

D'où les deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.

La conjecture est validée.

L'équation $f(x)=1$ admet deux solutions : -3 et 2.

N°36 page 98

a) D'après le graphique, il semble que les solutions de l'équation $f(x)=0$ valent environ 0,4 et 2,8.

b) On a :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (\ln x+1)(\ln x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=-1 \text{ ou } \ln x=1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \text{ ou } x=e^{1}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}\simeq 0,368 \text{ ou } x=e\simeq 2,718$$

L'équation $f(x)=0$ admet pour solutions $\frac{1}{e}$ et *e*.

N°37 page 98

Notons d'abord que le membre de gauche de l'équation est défini lorsque le logarithme népérien de « *x* » l'est, c'est-à-dire lorsque l'on a $x>0$. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$.

Les deux nombres donnés par Xcas sont e^{-3} et e^2. Ils sont bien strictement positifs.

Pour $x=e^{-3}$, on a $\ln x=\ln e^{-3}=-3$ et :

$$(\ln x)^2+\ln x-6=(-3)^2+(-3)-6=9-9=0$$

Pour $x=e^2$, on a $\ln x=\ln e^2=2$ et :

$$(\ln x)^2+\ln x-6=2^2+2-6=6-6=0$$

Les réels e^{-3} et e^2 sont bien solutions de l'équation $(\ln x)^2+\ln x-6=0$.

Le résultat ci-dessus est satisfaisant mais en un sens seulement. On peut en effet se demander si l'équation $(\ln x)^2+\ln x-6=0$ n'admet pas d'autres solutions.

Ainsi, plutôt que vérifier que tel ou tel réel est bien solution de cette équation, nous allons la résoudre directement.

Pour cela, on pose classiquement : $X=\ln x$ (changement de variable). L'équation se récrit alors : $X^2+X-6=0$.

Sous cette forme, nous reconnaissons une équation du second degré et déterminons sans peine ses deux solutions : -3 et 2. Attention ! Il convient alors de revenir à la variable d'origine :

$$X = \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$$
et
$$X = \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^{2}$$

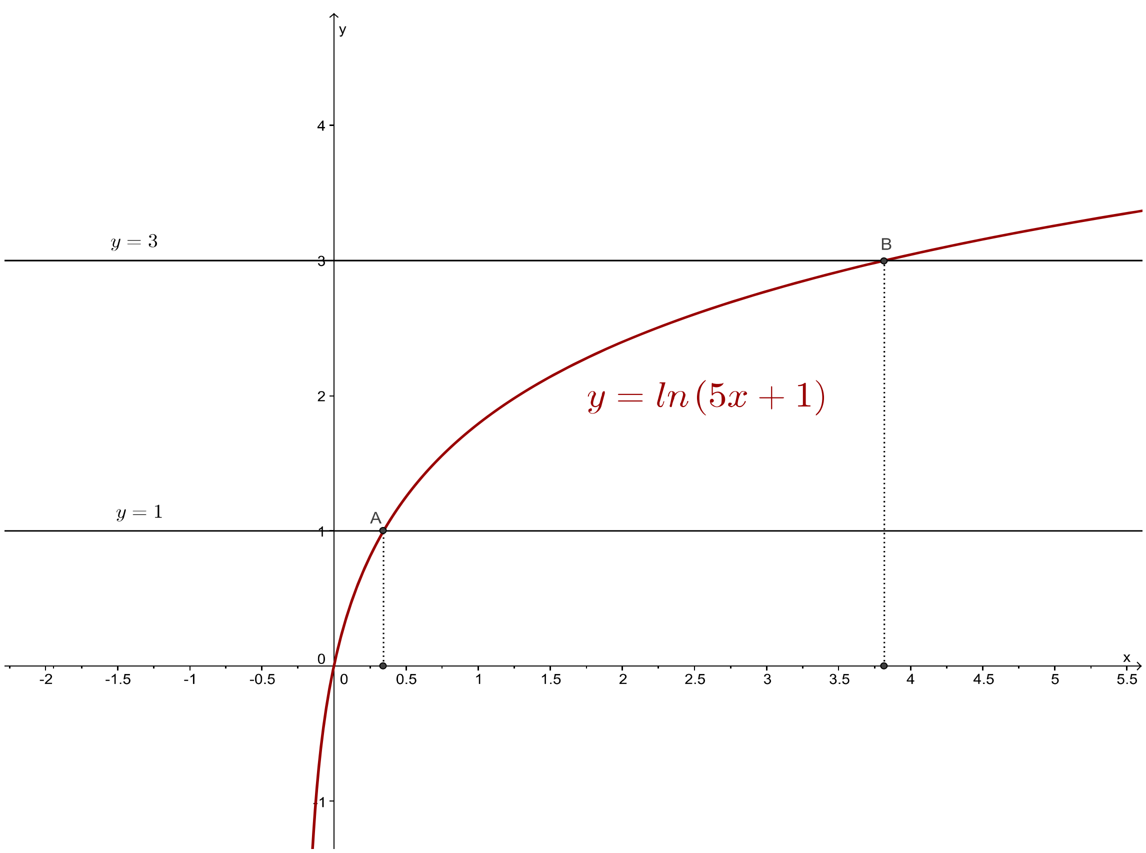
On retrouve ainsi les deux solutions e^{-3} et e^{2} et elles-seules !

N°39 page 98

a) Le réel $\ln(5x+1)$ existe si, et seulement si, on a : $5x+1>0$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{5} = -0,2$.

La fonction *f* est bien définie sur l'intervalle $\left]-0,2\,;+\infty\right[$.

b) Avec Geogebra, nous obtenons :



c) D'après la représentation graphique obtenue, les points A et B, points intersection de la courbe représentative de la fonction *f* avec les droites d'équation $y=1$ et $y=3$ respectivement, semblent admettre pour abscisse 0,35 et 3,8 respectivement.

d) On a :

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \ln(5x+1)=1 \Leftrightarrow 5x+1=e^1=e \Leftrightarrow x=\frac{e-1}{5}\simeq 0,344$$

$$f(x)=3 \Leftrightarrow \ln(5x+1)=3 \Leftrightarrow 5x+1=e^3 \Leftrightarrow x=\frac{e^3-1}{5}\simeq 3,817$$

Les équations $f(x)=1$ et $f(x)=3$ admettent pour solutions $\frac{e-1}{5}\simeq 0,344$ et $\frac{e^3-1}{5}\simeq 3,817$ respectivement.

N°45 page 99

a) $f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-0=\boxed{\ln x+1}$

b) $g'(x)=2x\times\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x=\boxed{x(2\ln x+1)}$

N°47 page 99

a) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times(2x+1)-\ln x\times 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\left[(2x+1)-2x\ln x\right]}{(2x+1)^2}=\boxed{\dfrac{2x+1-2x\ln x}{x(2x+1)^2}}$

b) $g'(x)=\dfrac{\left(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)\times(x+1)-x\ln x\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{(\ln x+1)\times(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\boxed{\dfrac{x+\ln x+1}{(x+1)^2}}$

N°49 page 99

Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x)=5\times\frac{1}{x}-0=\frac{5}{x}$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 s'écrit : $y=f'(1)\times(x-1)+f(1)$.

Soit : $y=f'(1)\times(x-1)+f(1)=\frac{5}{1}\times(x-1)+5\ln 1-3=5x-5-3=5x-8$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f:x\mapsto 5\ln x-3$ au point d'abscisse 1 est bien : $y=5x-8$.

N°55 page 99

a) Le deuxième résultat est clairement le plus utile pour utiliser le signe de la dérivée de la fonction *f* puisqu'il correspond à une forme factorisée de la dérivée.

b) On a : $f'(x)=(2\ln x+1)x$.

Comme on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2\ln x+1$.

On a : $2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

La fonction $x\mapsto 2\ln x+1$ étant strictement croissante, on en déduit immédiatement :

- Pour $x\in\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, $f'(x)<0$.
- Pour $x\in\left]\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$, $f'(x)>0$.

On en tire finalement :

- La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.
- La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$.

c) Comme $\frac{1}{\sqrt{e}}<1$, on a immédiatement $[1\,;2]\subset\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.

Elle est, par ailleurs, continue sur cet intervalle comme produit de deux fonctions (la fonction carrée et la fonction logarithme népérien) continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $[1\,;2]$.

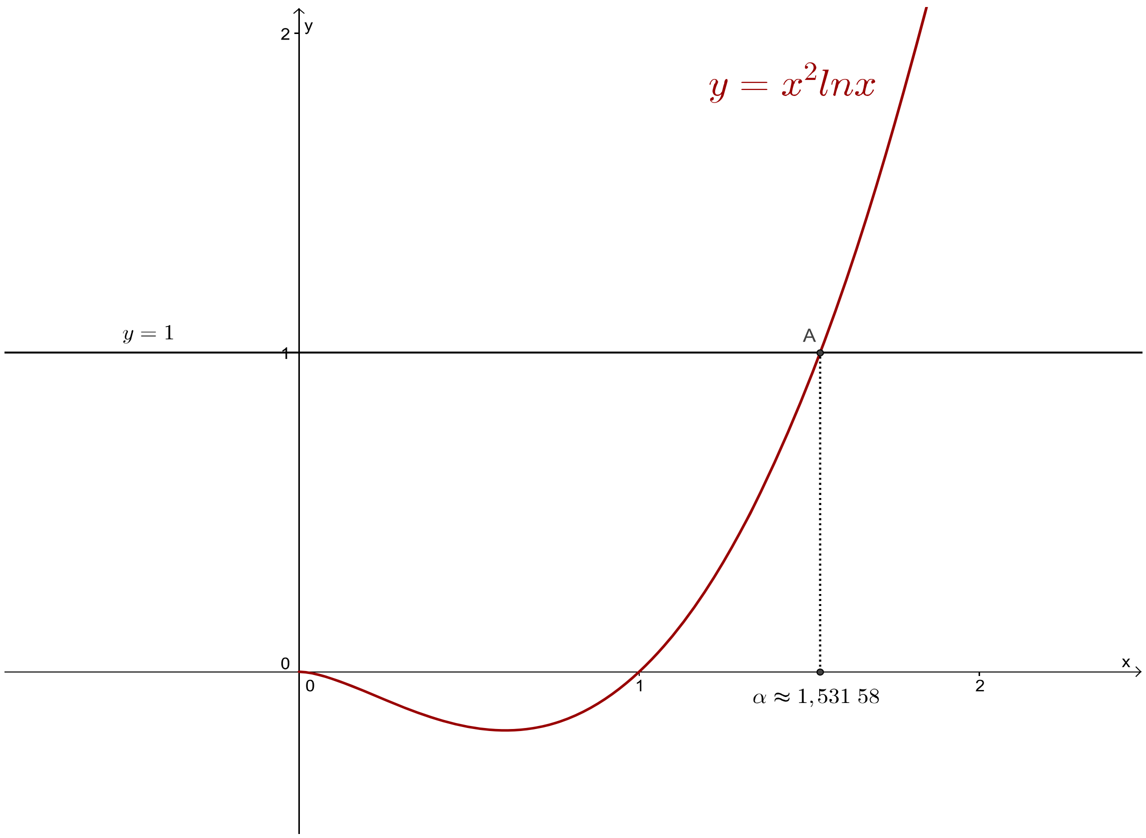
Enfin, on a $f(1)=1^2\times\ln 1=1\times 0=0$ et $f(2)=2^2\times\ln 2=4\ln 2\simeq 2,77$.

Comme $1\in[0:4\ln 2]$, le théorème de la bijection nous permet finalement de conclure que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;2]$.

L'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;2]$.

A titre de complément, notons qu'avec le logiciel Xcas (commande « fsolve »), on obtient, en notant α la solution obtenue : $\alpha\simeq 1,531\,58$.

Par ailleurs, page suivante, on a fourni une représentation graphique de la fonction *f* et de la droite d'équation $y=1$.



N°57 page 100

a) En utilisant la formule $\left(u^2\right)' = 2 \times u \times u'$ avec, pour u, la fonction logarithme népérien, on obtient, pour tout x réel strictement positif :

$$f'(x) = 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} - 0 = \frac{2\ln x}{x}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{2\ln x}{x}}$$

b) D'après le résultat précédent, le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $\ln x$ (le dénominateur de la fraction étant strictement positif). On a donc :

- Si $x \in \left]0\,;1\right[$, $f'(x) < 0$.
- $f'(1) = 0$.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0$.

On en déduit immédiatement que la fonction *f* est :

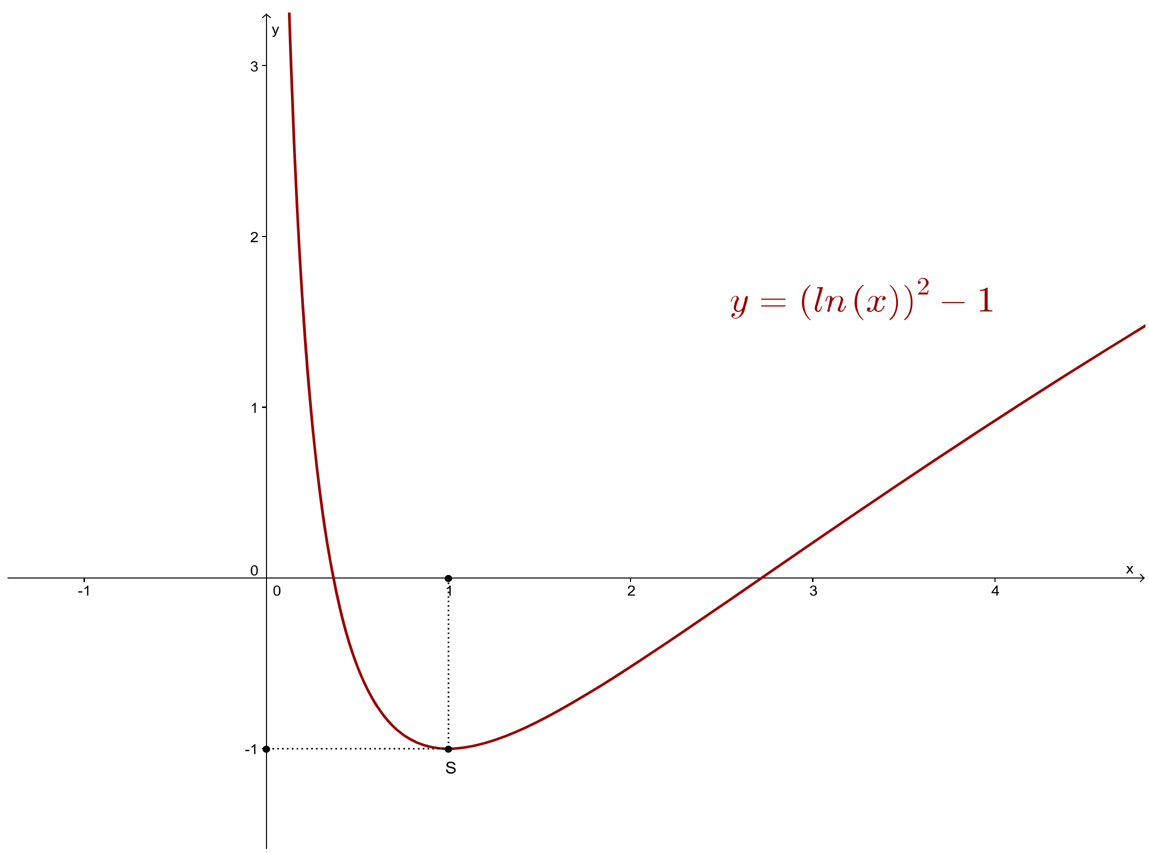
- strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;1]$.
- strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Ainsi, la fonction *f* admet un minimum pour $x=1$ et ce minimum vaut :

$$f(1)=(\ln 1)^2-1=-1$$

La fonction *f* admet un minimum pour $x=1$ et on a : $f(1)=-1$.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* en ayant fait apparaître le point S de coordonnées $(1\,;-1)$.



N°60 page 100

a) La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1. Il lui correspond donc la courbe de droite. On vérifie également que la fonction $x \mapsto \ln(1-2x)$ s'annule en 0, abscisse du point d'intersection de la courbe de gauche avec l'axe des abscisses.

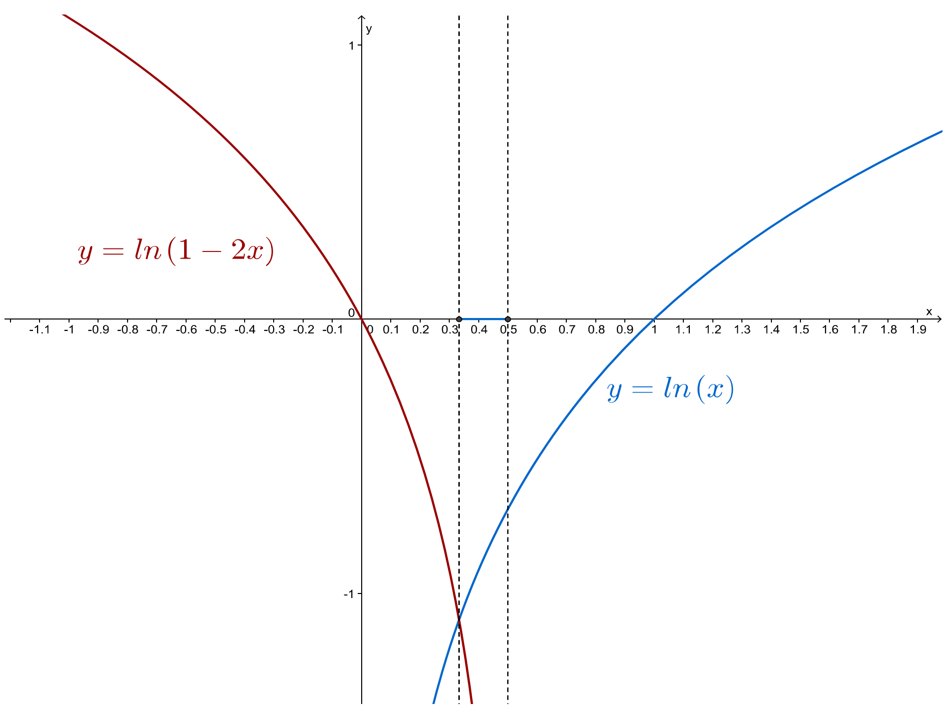
b) On ne peut calculer $f(x)$ que pour $x>0$ et on ne peut calculer $g(x)=\ln(1-2x)$ que pour x tel que $1-2x>0$, soit $x<\dfrac{1}{2}$. En définitive, on ne peut calculer $f(x)$ et $g(x)$ simultanément que pour x dans $]0\,;+\infty[\cap\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[=\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

c) L'inéquation $\ln x>\ln(1-2x)$ équivaut à $f(x)>g(x)$. D'après la question précédente, on résout donc cette inéquation sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

Pour tout x réel dans $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$, on a : $\ln x>\ln(1-2x)\Leftrightarrow x>1-2x\Leftrightarrow 3x>1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

Ainsi, l'inéquation $\ln x>\ln(1-2x)$ admet pour ensemble de solution : $\left]\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

Cet intervalle correspond aux abscisses des points de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f situés au-dessus des points correspondants de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction g.



N°67 page 100

a) $\ln 6 = \ln(2\times 3) = \boxed{\ln 2 + \ln 3}$

b) $\ln 12 = \ln(2^2\times 3) = \ln 2^2 \times \ln 3 = \boxed{2\ln 2 + \ln 3}$

c) $\ln\dfrac{2}{3} = \boxed{\ln 2 - \ln 3}$

d) $\ln\dfrac{9}{8} = \ln\dfrac{3^2}{2^3} = \ln 3^2 - \ln 2^3 = \boxed{2\ln 3 - 3\ln 2}$

N°69 page 100

a) $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 \simeq 2\times 0,7 = \boxed{1,4}$

b) $\ln 8 = \ln 2^3 = 2\ln 2 \simeq 3\times 0,7 = \boxed{2{,}1}$

c) $\ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2 \simeq \boxed{-0,7}$

d) $\ln\dfrac{1}{16} = \ln\dfrac{1}{2^4} = -\ln 2^4 = -4\ln 2 \simeq -4\times 0,7 = \boxed{-2,8}$

N°70 page 100

a) $\ln 2 + \ln 3 - \ln 6 = \ln\dfrac{2\times 3}{6} = \ln 1 = \boxed{0}$

b) $\ln 10 - \ln 20 + \ln 30 - \ln 40 = \ln\dfrac{10\times 30}{20\times 40} = \ln\dfrac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 = \ln 3 - \ln 2^3 = \boxed{\ln 3 - 2\ln 2}$ ou

$$\begin{aligned}\ln 10 - \ln 20 + \ln 30 - \ln 40 &= \ln 10 - (\ln 2 + \ln 10) + \ln 3 + \ln 10 - (\ln 4 + \ln 10)\\ &= -\ln 2 + \ln 3 - \ln 4\\ &= \ln 3 - \ln 2 - \ln 2^2\\ &= \ln 3 - \ln 2 - 2\ln 2\\ &= \boxed{\ln 3 - 3\ln 2}\end{aligned}$$

c) $\ln(2e^3) - \ln 2 = \ln 2 + \ln e^3 - \ln 2 = 3\ln e = \boxed{3}$

d) $\ln(e^8) - 5\ln e = 8\ln e - 5\ln e = 8 - 5 = \boxed{3}$

e) $\ln e^{x^2+1} - e^{2\ln x} + \ln e = x^2 + 1 - e^{\ln x^2} + 1 = x^2 + 2 - x^2 = \boxed{2}$

f) $\ln\left(\dfrac{xe^x}{2}\right) - x = \ln x + \ln e^x - \ln 2 - x = \ln x + x - \ln 2 - x = \boxed{\ln x - \ln 2}$

N°73 page 100

a) Le membre de gauche de l'équation n'est défini que pour *x* tel que $x-2>0$, soit $x>2$.
Le membre de droite n'est défini que pour *x* tel que $6-2x>0$, soit $x<3$.
En définitive, on va résoudre l'équation dans l'ensemble $]2\,;+\infty[\,\cap\,]-\infty\,;3[$, c'est-à-dire $]2\,;3[$.

b) Pour tout *x* dans $]2\,;3[$, on a :

$$\begin{aligned}&\ln 5+\ln(x-2)=\ln(6-2x)\\ \Leftrightarrow\ &\ln\left[5(x-2)\right]=\ln(6-2x)\\ \Leftrightarrow\ &5(x-2)=6-2x\\ \Leftrightarrow\ &5x-10=6-2x\\ \Leftrightarrow\ &7x=16\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{16}{7}\end{aligned}$$

Comme $\frac{16}{7}\in\,]2\,;3[$, on conclut finalement :

L'équation $\ln 5+\ln(x-2)=\ln(6-2x)$ admet $\frac{16}{7}$ pour unique solution.

N°76 page 101

$\ln x$ existe si, et seulement si, on a : $x>0$.
$\ln(2x-3)$ existe si, et seulement si, on a : $2x-3>0$, soit $x>\frac{3}{2}$.

On résout donc l'équation sur l'intervalle $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$, on a :

$$\ln x+\ln 2=\ln(2x-3)\Leftrightarrow \ln(2x)=\ln(2x-3)\Leftrightarrow 2x=2x-3\Leftrightarrow 0=-3$$

Cette dernière égalité étant fausse, l'équation n'admet pas de solution.

L'équation $\ln x+\ln 2=\ln(2x-3)$ n'admet pas de solution.

N°77 page 101

1. $1{,}1^n \geq 2 \Leftrightarrow \ln\left(1{,}1^n\right) \geq \ln 2 \Leftrightarrow n\ln 1{,}1 \geq \ln 2 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1}$

On a : $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \simeq 7{,}27$.

Le plus petit entier naturel vérifiant $1{,}1^n \geq 2$ est donc 8.

A titre de vérification : $1{,}1^7 \simeq 1{,}95$ et $1{,}1^8 \simeq 2{,}14$.

2. On a :

$$\begin{aligned} 2^n \geq 2000 &\Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) \geq \ln 2000 \Leftrightarrow n\ln 2 \geq \ln 2 + \ln 10^3 \\ &\Leftrightarrow n\ln 2 \geq \ln 2 + 3\ln 10 \Leftrightarrow n\ln 2 \geq \ln 2 + 3\left(\ln 2 + \ln 5\right) \\ &\Leftrightarrow n\ln 2 \geq 4\ln 2 + 3\ln 5 \Leftrightarrow n \geq \frac{4\ln 2 + 3\ln 5}{\ln 2} \\ &\Leftrightarrow n \geq 4 + 3\frac{\ln 5}{\ln 2} \end{aligned}$$

On a : $4 + 3\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \simeq 10{,}97$.

Le plus petit entier naturel vérifiant $2^n \geq 2000$ est donc 11.

A titre de vérification : $2^{10} = 1024$ et $2^{11} = 2048$.

3. $1{,}02^n \geq 1{,}5 \Leftrightarrow \ln\left(1{,}02^n\right) \geq \ln 1{,}5 \Leftrightarrow n\ln 1{,}02 \geq \ln 1{,}5 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}02}$

On a : $\dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}02} \simeq 20{,}48$.

Le plus petit entier naturel vérifiant $1{,}02^n \geq 1{,}5$ est donc 21.

A titre de vérification : $1{,}02^{20} \simeq 1{,}486$ et $1{,}02^{21} \simeq 1{,}516$.

4. $\left(1+\dfrac{15}{100}\right)^n \geq 5 \Leftrightarrow 1{,}15^n \geq 5 \Leftrightarrow \ln\left(1{,}15^n\right) \geq \ln 5 \Leftrightarrow n\ln 1{,}15 \geq \ln 5 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 5}{\ln 1{,}15}$

On a : $\dfrac{\ln 5}{\ln 1{,}15} \simeq 11{,}5$.

Le plus petit entier naturel vérifiant $\left(1+\dfrac{15}{100}\right)^n \geq 5$ est donc 12.

A titre de vérification : $\left(1+\dfrac{15}{100}\right)^{11} \simeq 4{,}65$ et $\left(1+\dfrac{15}{100}\right)^{12} \simeq 5{,}35$.

N°79 page 101

La réponse de Joséphine n'est pas correcte !

La calculatrice formelle résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$. Nous ne savons pas (encore) effectuer une telle résolution. En revanche, le nombre 8,003 922 779 65 est strictement supérieur à 8 et le plus petit entier naturel solution de l'inéquation $0,75^n < 0,1$ sera donc 9 !

A titre de vérification : $0,7^8 \simeq 0,100\,113$ et $0,7^9 \simeq 0,075\,085$.

N°85 page 101

Soit t (en %) le taux cherché. Nous le considérons comme positif (on parlera donc d'un « taux de diminution ») en utilisant le coefficient multiplicateur $1-\frac{t}{100}$ chaque année.
La période considérée comportant 5 années, le coefficient précédent est appliqué 5 fois, ce qui correspond à un coefficient global égal à $\left(1-\frac{t}{100}\right)^5$.
Sur la période considérée, on souhaite une baisse globale de 25%. Cette baisse correspond à un coefficient multiplicateur égal à : $1-\frac{25}{100}=0,75$.
En définitive, on obtient l'équation : $\left(1-\frac{t}{100}\right)^5=0,75$.
En utilisant le logarithme népérien, on obtient alors :

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)^5=0,75$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(1-\frac{t}{100}\right)^5\right]=\ln 0,75 \Leftrightarrow 5\ln\left(1-\frac{t}{100}\right)=\ln 0,75$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{t}{100}=\exp\left(\frac{\ln 0,75}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{t}{100}=1-\exp\left(\frac{\ln 0,75}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow t=100\times\left[1-\exp\left(\frac{\ln 0,75}{5}\right)\right]\simeq 5,59$$

Une diminution de 25% sur 5 ans équivaut à une diminution annuelle moyenne de $t=100\times\left[1-\exp\left(\frac{\ln 0,75}{5}\right)\right]\%$ soit environ $5,59\%$.

N°94 page 105

1. Notons que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et à fortiori sur l'intervalle $[1;6]$) comme somme d'une fonction polynôme ($x \mapsto -x^2+10x-9$) et d'une fonction proportionnelle à la fonction logarithme népérien ($x \mapsto -8\ln x$) toute deux dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel x dans l'intervalle $[1;6]$, on a alors :

$$f'(x) = -2x+10-\frac{8}{x} = \frac{-2x^2+10x-8}{x} = -2\frac{x^2-5x+4}{x}$$

Le discriminant Δ associé au trinôme x^2-5x+4 vaut : $\Delta = (-5)^2-4\times1\times4 = 25-16 = 9$.

D'où les deux racines : $x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

On a ainsi la factorisation : $x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$.

(Remarque : on pouvait l'obtenir plus directement en notant que 1 était racine évidente, la somme des coefficients étant nulle)

D'où, finalement :

$$\boxed{\forall x \in [1;6],\ f'(x) = -2\frac{(x-1)(x-4)}{x}}$$

2. Notons d'abord que pour tout réel x de l'intervalle $[1;6]$, on a $-\frac{2}{x}<0$. Il convient donc, fondamentalement, d'étudier le signe du produit $(x-1)(x-4)$.

Pour $x \in]1;4[$, on a : $(x-1)(x-4)<0$ et donc $f'(x)>0$.

Pour $x \in]4;6[$, on a : $(x-1)(x-4)>0$ et donc $f'(x)<0$.

Enfin, on a $f'(1) = f'(4) = 0$.

Finalement :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[1;4]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[4;6]$.

3. Il découle immédiatement de l'étude précédente que la fonction f admet un maximum pour $x=4$ sur l'intervalle $[1;6]$. La valeur maximale correspondante vaut :

$$f(4) = -4^2+4\times10-9-8\times\ln 4 = -16+40-9-16\ln 2 = 15-16\ln 2 \simeq 3{,}909\,6$$

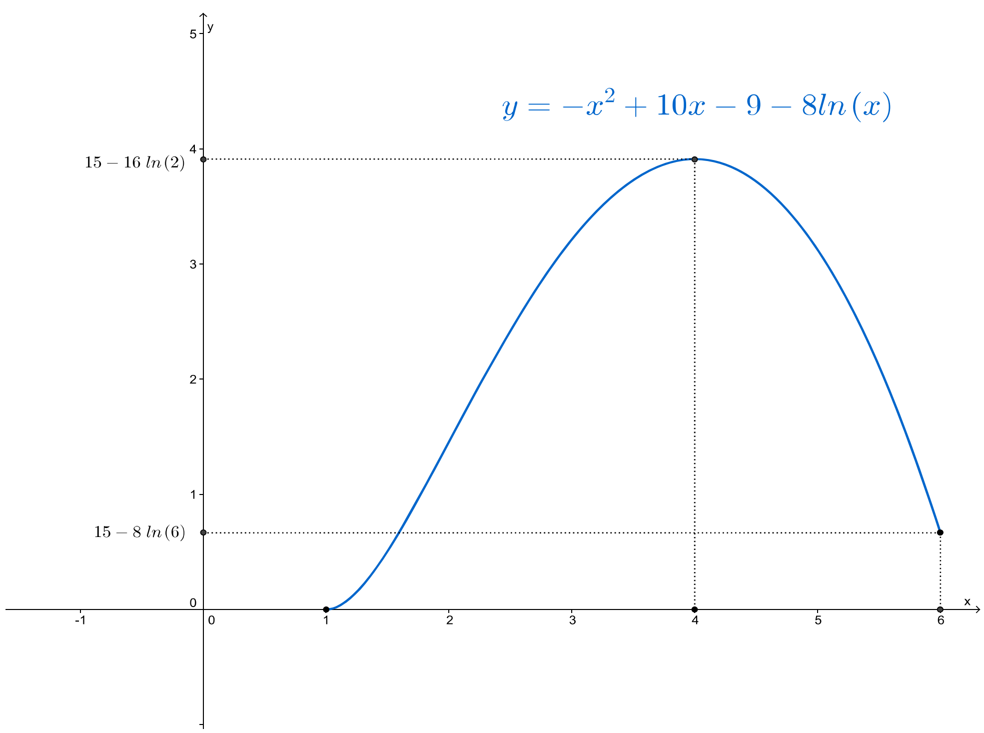
Il ne nous reste plus qu'à calculer $f(1)$ et $f(6)$:

$$f(1) = -1^2 + 1\times 10 - 9 - 8\times \ln 1 = -1 + 10 - 9 - 8\times 0 = 0$$
$$f(6) = -6^2 + 6\times 10 - 9 - 8\times \ln 6 = -36 + 60 - 9 - 8\ln 6 = 15 - 8\ln 6 \simeq 0,67$$

On a alors le tableau :

x	1		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$15-16\ln 2$	$\searrow$	$15-8\ln 6$

4. Le maximum de *f* est obtenu pour $x = 4$, ce qui correspond à une production de 400 pièces. Le maximum de *f* vaut alors $f(4) = 15 - 16\ln 2 \simeq 3{,}909\,6$, ce qui correspond à un bénéfice de 39 096€ (valeur arrondie à l'euro).



N°95 page 105

1. **a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle : la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ et la fonction $x \mapsto 2\ln x$, proportionnelle à la fonction logarithme népérien.
Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Comme l'inverse d'un réel strictement positif est un réel strictement positif, on en déduit immédiatement que l'on a $g'(x) > 0$ puis que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On a immédiatement $g(1) = 0$ (remarque : indépendamment du fait que cette valeur est fournie dans l'énoncé, il est légitime de penser à la valeur 1 puisque cette valeur annule à la fois la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ et la fonction logarithme népérien). La fonction g étant strictement croissante, elle ne peut s'annuler pour une deuxième valeur.

L'équation $g(x) = 0$ admet 1 comme unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) Pour $x < 1$, soit $x \in]0\,;1[$, on a, g étant strictement croissante : $g(x) < g(1)$, soit $g(x) < 0$.
Pour $x > 1$, on a cette fois $g(x) > g(1)$, soit $g(x) > 0$.
Enfin $g(1) = 0$.

La fonction g :
- est strictement négative sur l'intervalle $]0\,;1[$.
- est strictement positive sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
- s'annule en 1.

2. **a)** La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de deux fonction dérivables sur cet intervalle.

Pour tout x réel strictement positif on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times \ln x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x-2x\ln x}{x^4} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} - \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{x^2-1+2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

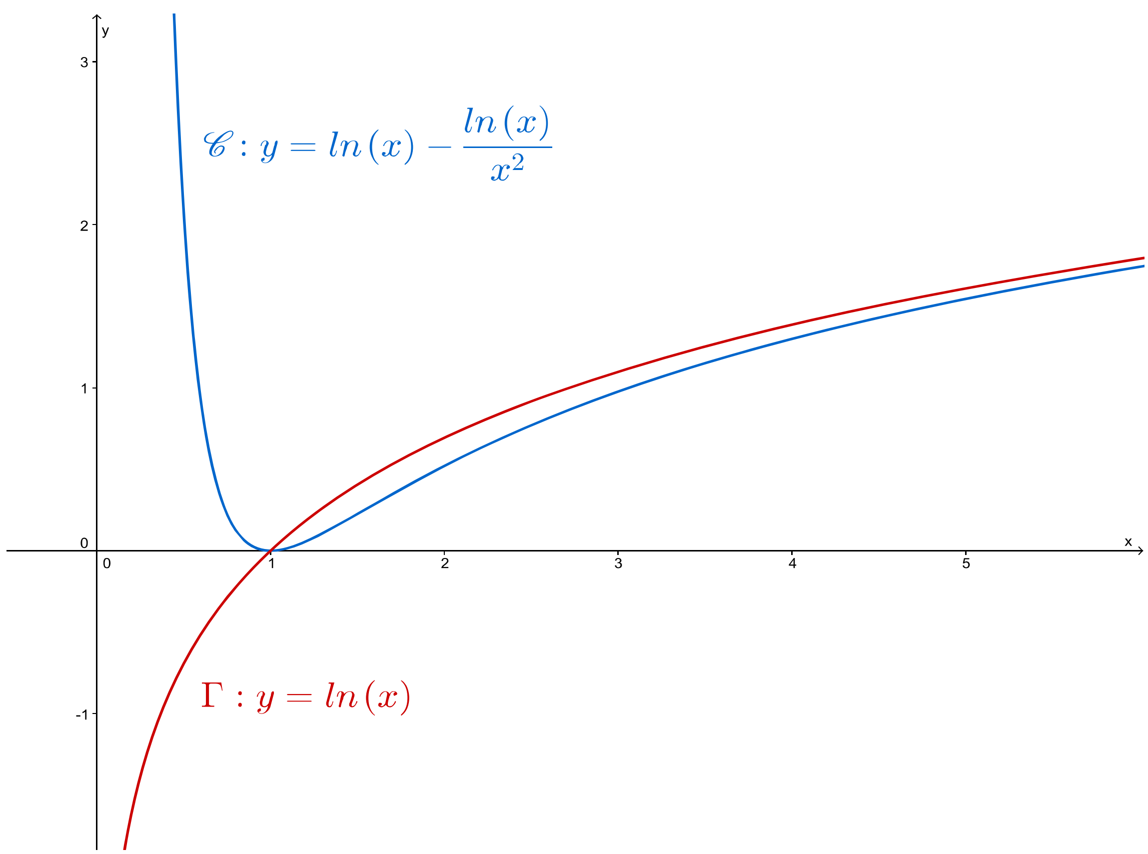
Pour tout x réel strictement positif, on a $x^3 > 0$. On en déduit immédiatement :

$$\boxed{\text{Les fonctions } f' \text{ et } g \text{ ont des signes identiques.}}$$

b) D'après la question 1.c), il vient alors immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } \left]0\,;1\right] \\ \text{et strictement croissante sur l'intervalle } \left[1\,;+\infty\right[.\end{array}}$$

A titre de complément (et en anticipant un peu sur la question suivante …), nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}$ et Γ des fonctions f et logarithme népérien respectivement.



c) Pour étudier la position relative des deux courbes, on peut étudier le signe de la différence $\ln x - f(x)$.

On a immédiatement : $\ln x - f(x) = \ln x - \left(\ln x - \dfrac{\ln x}{x^2} \right) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Comme le dénominateur est strictement positif, le signe de cette fraction est celui de son numérateur, c'est-à-dire celui de la fonction logarithme népérien ! On en déduit immédiatement :

- Si $x \in]0;1[$, on a $\ln x < 0$, d'où $\ln x - f(x) < 0$ et la courbe Γ est situé sous la courbe $\mathscr{C}$.
- Pour $x = 1$, les courbes Γ et $\mathscr{C}$ se croisent.
- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$, d'où $\ln x - f(x) > 0$ et la courbe Γ est situé au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

N°108 page 108

1. **a)** On a les points $\mathrm{A}(0;3)$ et $\mathrm{B}(-1;1)$.

Posons $y = ax + b$ l'équation réduite de la droite (AB) (une telle équation existe puisque la droite (AB) n'est pas verticale).

Les coordonnées de A vérifient cette équation : $3 = a \times 0 + b$. D'où : $b = 3$.

Les coordonnées de B vérifient cette équation : $1 = a \times (-1) + 3$. D'où : $a = 2$.

En définitive :

L'équation réduite de la droite (AB) est $y = 2x + 3$.

b) $\mathrm{A}(0;3)$ étant un point de $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction *f*, on a immédiatement : $f(0) = 3$.

La droite (AB) de coefficient directeur 2 étant tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{A}(0;3)$, il vient : $f'(0) = 2$.

$\mathrm{E}(1;3+\ln 2)$ étant un point de $\mathscr{C}$, on a immédiatement : $f(1) = 3 + \ln 2$.

Enfin, la droite Δ est tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{E}(1;3+\ln 2)$ et est horizontale (droite de coefficient directeur nul). On en tire : $f'(1) = 0$.

En définitive :

$f(0) = 3$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 3 + \ln 2$ et $f'(1) = 0$.

c) Par lecture graphique, la droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en deux points. On en déduit :

L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions.

d) Là encore par lecture graphique, on peut conjecturer :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.

2. On admet : $f\left(x\right)=ax+5+\dfrac{b}{x+1}+\ln\left(x+1\right)$.

On a :

$$f\left(0\right)=3\Leftrightarrow a\times 0+5+\frac{b}{0+1}+\ln\left(0+1\right)=3\Leftrightarrow 5+b=3\Leftrightarrow b=3-5=-2$$

On a donc $b=-2$ et $f\left(x\right)=ax+5+\dfrac{-2}{x+1}+\ln\left(x+1\right)$.

D'où :

$$f\left(1\right)=3+\ln 2\Leftrightarrow a\times 1+5+\frac{-2}{1+1}+\ln\left(1+1\right)=3+\ln 2\Leftrightarrow a+4+\ln 2=3+\ln 2\Leftrightarrow a=-1$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[,\ f\left(x\right)=-x+5+\frac{-2}{x+1}+\ln\left(x+1\right)}$$

En guise de vérification, on peut dériver *f* et calculer $f'\left(0\right)$ et $f'\left(1\right)$.

On a :

$$\forall x\in\left]-1\,;+\infty\right[,\ f'\left(x\right)=-1+\frac{2}{\left(x+1\right)^2}+\frac{1}{x+1}$$

D'où :

$$f'\left(0\right)=-1+\frac{2}{\left(0+1\right)^2}+\frac{1}{0+1}=-1+2+1=2$$

$$f'\left(1\right)=-1+\frac{2}{\left(1+1\right)^2}+\frac{1}{1+1}=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

N°113 page 109

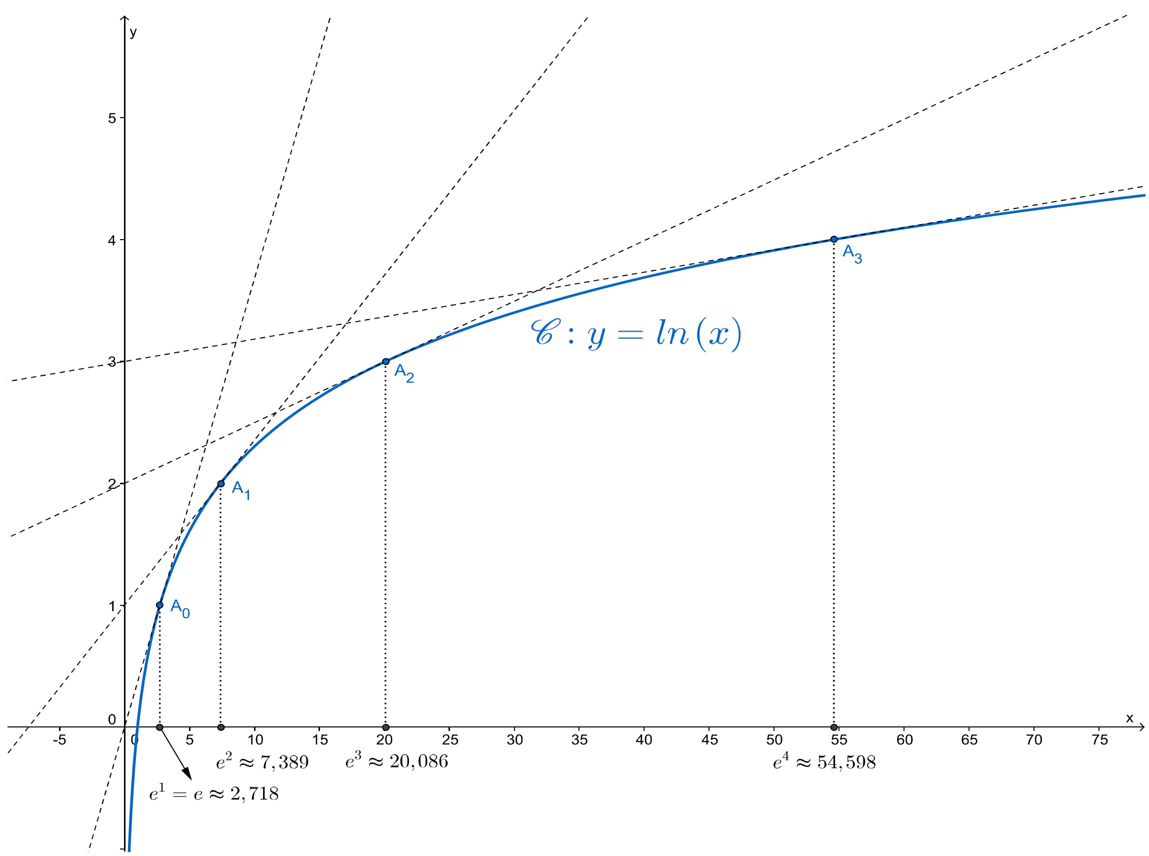
Notons $A_n\left(a_n\,;\ln a_n\right)$. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point s'écrit :

$$y=\frac{1}{a_n}\left(x-a_n\right)+\ln a_n=\frac{1}{a_n}x-1+\ln a_n$$

On veut que cette droite passe par le point de coordonnées $\left(0\,;n\right)$. On doit donc avoir :

$$n=\frac{1}{a_n}\times 0-1+\ln a_n=-1+\ln a_n$$

On a alors : $n=-1+\ln a_n\Leftrightarrow\ln a_n=n+1\Leftrightarrow a_n=e^{n+1}$.
On a trouvé une unique solution. Pour tout entier naturel *n*, le point A_n est défini de façon unique, il s'agit du point de coordonnées $\left(e^{n+1}\,;n+1\right)$.



N°113 page 109

Raisonnons sur la première année.
La dette de l'état augmente de 5%, c'est-à-dire, en valeur, de $5\% \times 400 = 20$ milliards d'euros.
Or ce montant correspond exactement à la capacité annuelle de remboursement de l'état.
Ainsi, à la fin de la première année, la valeur de la dette publique de cet état sera toujours de 400 milliards d'euros.

Avec un tel modèle, la dette publique de l'état reste inchangée à 400 milliards d'euros
et ne sera jamais remboursée …