1. Etudier la parité de la somme et du produit de deux entiers relatifs.
2. Soit n un entier relatif.
   Montrer que l'on a : n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair.
3. Soit n et p deux entiers relatifs tels que :
$$3n^2 + 5p^2 = 152$$
   Montrer que n et p sont de même parité.

Analyse

Les deux premières questions sont classiques et doivent être connues (i.e. ne pas poser de difficultés particulières). La troisième question exploite les résultats des deux premières.

Résolution

Question 1.

Soit n et p deux entiers relatifs.
Que ce soit pour la somme ou le produit, nous discutons selon les parités des entiers n et p.

Parité de la somme.

- Si n et p sont pairs
  On a : $n = 2n'$ et $p = 2p'$. Alors $n + p = 2n' + 2p' = 2(n' + p')$.
  La somme est paire.
- Si n est pair et p impair
  On a : $n = 2n'$ et $p = 2p' + 1$. Alors $n + p = 2n' + 2p' + 1 = 2(n' + p') + 1$.
  La somme est impaire.
- Si n est impair et p pair
  On a : $n = 2n' + 1$ et $p = 2p'$. Alors $n + p = 2n' + 1 + 2p' = 2(n' + p') + 1$.
  La somme est impaire.
- Si n est impair et p impair
  On a : $n = 2n' + 1$ et $p = 2p' + 1$. Alors $n + p = 2n' + 1 + 2p' + 1 = 2(n' + p' + 1)$.
  La somme est paire.

On peut, en définitive, énoncer la règle classique suivante :

La somme de deux entiers relatifs est :
- Paire si, et seulement si, les deux entiers sont de même parité.
- Impaire si, et seulement si, les deux entiers ne sont pas de même parité.

Parité du produit.

En procédant comme ci-dessus, il vient :

- Si *n* et *p* sont pairs
  On a : $n = 2n'$ et $p = 2p'$. Alors $n \times p = 2n' \times 2p' = 2 \times (2n'p')$.
  Le produit est pair.
- Si *n* est pair et *p* impair
  On a : $n = 2n'$ et $p = 2p'+1$. Alors $n \times p = 2n' \times 2p'+1 = 2 \times n'(2p'+1)$.
  Le produit est pair.
- Si *n* est impair et *p* pair
  On a : $n = 2n'+1$ et $p = 2p'$. Alors $n \times p = (2n'+1) \times 2p' = 2 \times p'(2n'+1)$.
  Le produit est pair.
- Si *n* est impair et *p* impair
  On a : $n = 2n'+1$ et $p = 2p'+1$. Alors
  $n \times p = (2n'+1) \times (2p'+1) = 2(2n'p'+n'+p')+1$.
  Le produit est impair.

Remarque : on aurait également pu noter dès le début que tout produit d'un entier par un entier pair est pair.

On peut, en définitive, énoncer la règle classique suivante :

La produit de deux entiers relatifs est :
- Pair si, et seulement si, l'un au moins des deux entiers est pair.
- Impair si, et seulement si, les deux entiers sont impairs.

Question 2.

Soit *n* un entier relatif.
D'après la question précédente, on a : n^2 impair $\Leftrightarrow$ *n* impair.
Puisqu'un entier est pair ou impair, on en déduit immédiatement : n^2 pair $\Leftrightarrow$ *n* pair.

Pour tout entier relatif *n*, on a : n^2 pair $\Leftrightarrow$ *n* pair.

Question 3.

Supposons que l'entier n soit pair.
Alors, d'après la question précédente, il en va de même pour son carré.
D'après la question 1, on en déduit alors que le produit $3n^2$ est pair.
Toujours d'après la question 1, il en va de même pour la différence $152-3n^2$.
Donc le produit $5p^2$ est pair.
Mais d'après la question 1, le produit de 5 et p^2 est pair si, et seulement si, p^2 est pair.
La question 2 nous permet alors de conclure que p est pair.

On a ainsi montré : n pair $\Rightarrow$ p pair.

Mais comme le coefficient de « p^2 » dans l'équation est impair comme celui de « n^2 », on montre de façon similaire que l'on a : p pair $\Rightarrow$ n pair.

En définitive, on a l'équivalence : n pair $\Leftrightarrow$ p pair.
Ainsi, les deux entiers n et p sont de même parité.

Si deux entiers n et p vérifient l'équation $3n^2+5p^2=152$ alors ils sont de même parité.