Cours

→ Equation du second degré

Vocabulaire et interprétation graphique

$f(x)=0$ où *f* désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit : $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$).

La fonction *f* est une fonction polynôme de degré deux encore appelée, par abus de langage, « trinôme du second degré ».

→ Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient alors à déterminer l'abscisse des éventuels points d'intersection de la courbe représentative de la fonction *f* (rappelons qu'il s'agit d'une parabole) et de l'axe des abscisses.

Mise sous forme canonique

Une fois encore, les identités remarquables vont nous être utiles :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ s'appelle « la forme canonique » du trinôme ax^2+bx+c.

On pose alors $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$. Δ est appelé « le discriminant » de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

On a finalement : $\boxed{ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)}$.

Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

La forme canonique obtenue précédemment va nous permettre de conclure.

Nous menons la discussion d'après le signe de Δ :

- $\boxed{1^{er}\text{ cas : }\Delta<0}$

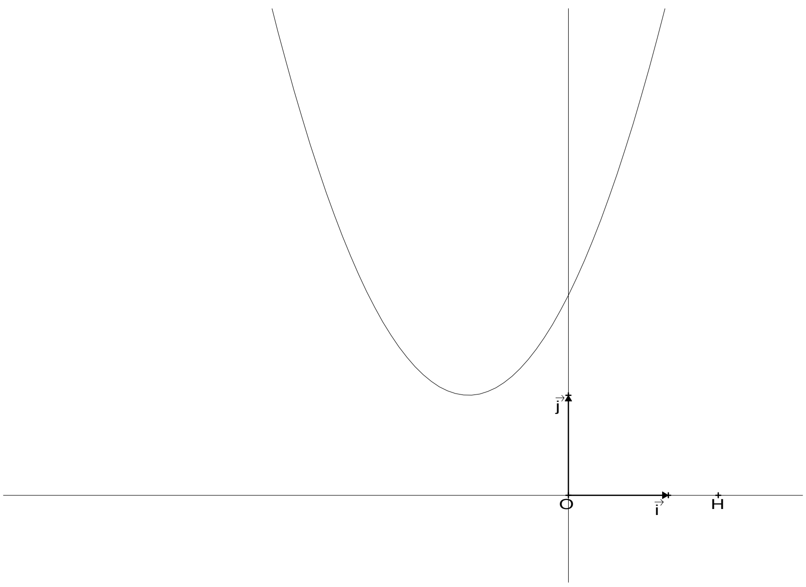
  Dans ce cas, on a : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ et $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. D'où : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$.

  Finalement : $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\neq 0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution.

  → La courbe représentative de la fonction *f* ne coupe pas l'axe des abscisses.

  Exemple

  On a fourni ci-dessous une partie de la représentation graphique de la fonction *f* définie par : $f(x)=x^2+2x+2$



- $\boxed{2^{ème}\text{ cas : }\Delta=0}$

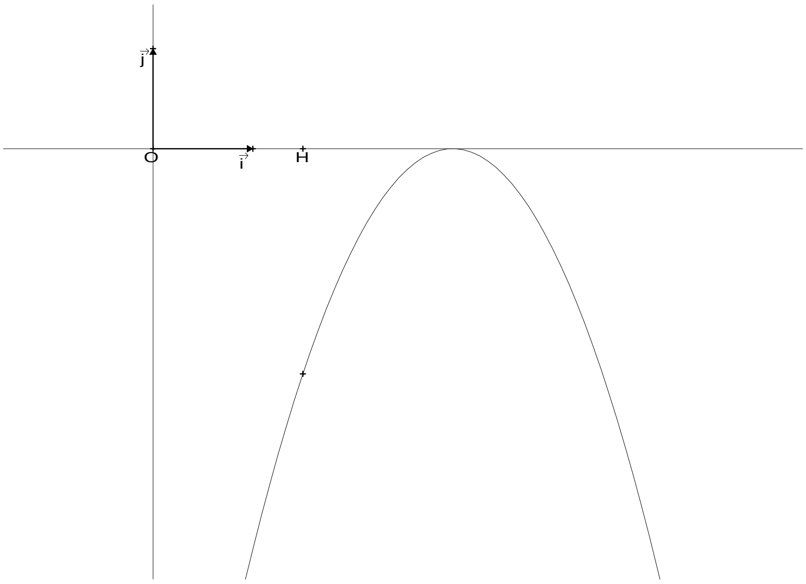
  L'équation se récrit : $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ soit : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$.

  L'équation admet donc une seule solution : $\boxed{x_0=-\dfrac{b}{2a}}$.

  → La courbe représentative de la fonction *f* coupe l'axe des abscisses en un unique point qui est le sommet de la parabole représentant *f*. De plus, l'axe des abscisses est tangent à la parabole en ce point.

Exemple

On a fourni ci-dessous une partie de la représentation graphique de la fonction *f* définie par : $f(x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$



- $\boxed{3^{\text{ème}} \text{ cas : } \Delta > 0}$

  La forme canonique se récrit :

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

L'équation initiale est alors équivalente à : $a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$.

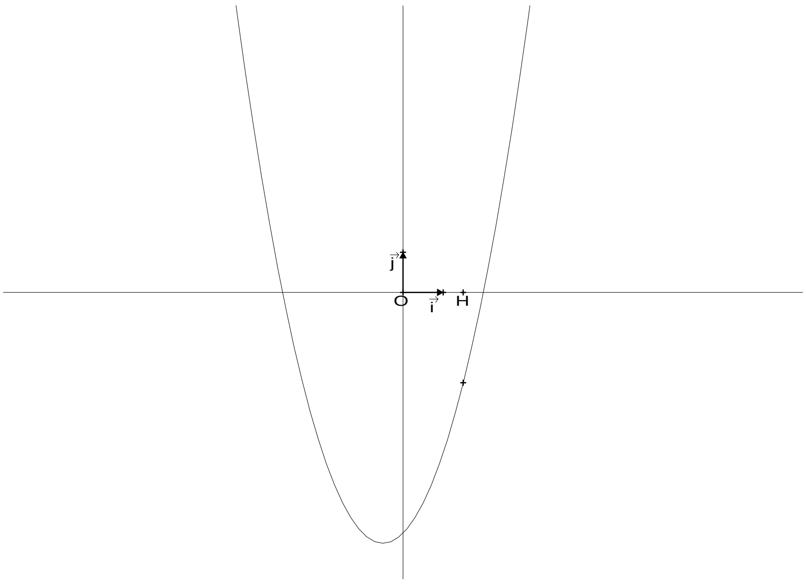
Elle admet les deux solutions suivantes : $\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Note : $x_1 \neq x_2$ (calculer la différence et conclure).

→ La courbe représentative de la fonction *f* coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2.

Exemple

On a fourni ci-après une partie de la représentation graphique de la fonction *f* définie par : $f(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$



Synthèse

Discriminant	**Solutions de $ax^2+bx+c=0$**	**Factorisation de $ax^2+bx+c=0$**
$\Delta<0$	Pas de solution	Pas de factorisation
$\Delta=0$	Une seule solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	$a(x-x_0)^2$
$\Delta>0$	Deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

Méthode générale de résolution d'une équation du second degré

Elle repose sur les étapes principales suivantes :

1. Placer tous les termes dans un même membre ;
2. Le cas échéant, factoriser sans développer. Si une factorisation ne semble pas possible, développer et réduire en ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de l'inconnue ;
3. Si une factorisation a été effectuée : donner les racines et conclure ;
4. Si aucune factorisation n'a pu être obtenue :
   a. Simplifier éventuellement l'écriture de l'équation ;
   b. Calculer le discriminant et conclure.