Construction au compas du milieu d'un segment.

Introduction

En géométrie, il y a, bien sûr, les démonstrations comme une illustration presque parfaite de ce que peut être la rigueur et la précision des mathématiques. Mais il y a aussi ce fabuleux domaine des constructions qui illustre peut-être davantage les dimensions esthétique et ludique que peuvent avoir les mathématiques.

Le domaine le plus célèbre est celui des constructions à la règle (non graduée bien sûr !) et au compas et vous connaissez un certain nombre de ces constructions (médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle, …). En revanche, on vous a rarement (peut-être jamais ?) demandé d'effectuer une construction au compas seul ! Ce domaine-là est plus déroutant (tracer des figures géométriques sans règle ? Quelle drôle d'idée !) et, en général, plus technique.

Dans ce document, nous vous fournissons la magnifique construction du milieu d'un segment donné. En outre, dans un deuxième temps, nous vous fournissons des éléments de justification de cette construction (c'est l'aspect « démonstration » sous-jacent à la construction et permettant de mieux la comprendre).

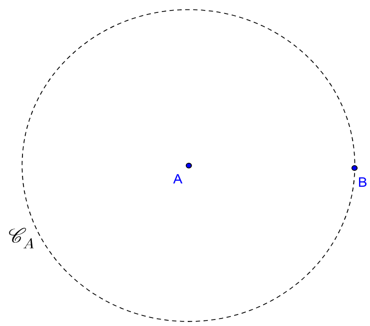
Vous aurez tout intérêt à réaliser cette construction vous-même à la main (sur une feuille blanche) ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique tel Geogebra (c'est celui-ci qui a été utilisé pour obtenir les figures de ce document).

Notre point de départ est donc un segment de longueur non nulle … A vous de jouer !

Bonne lecture, bonne construction et … beaucoup de belles mathématiques pour la suite !

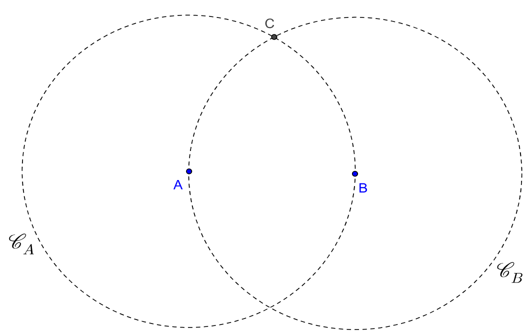
La construction

→ Etape 1 : tracer le cercle de centre A et de rayon AB.



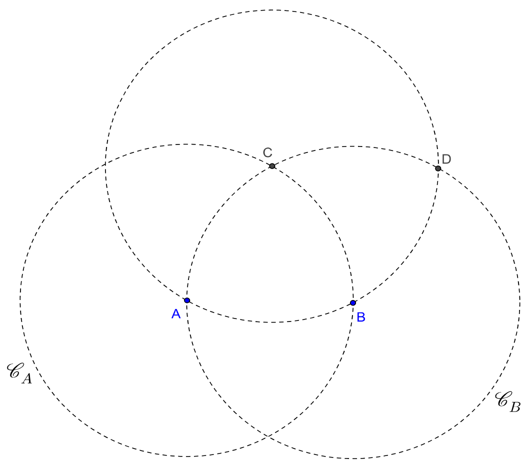
Nous notons $\mathscr{C}_A$ ce cercle.

→ Etape 2 : tracer le cercle de centre B et de rayon AB.



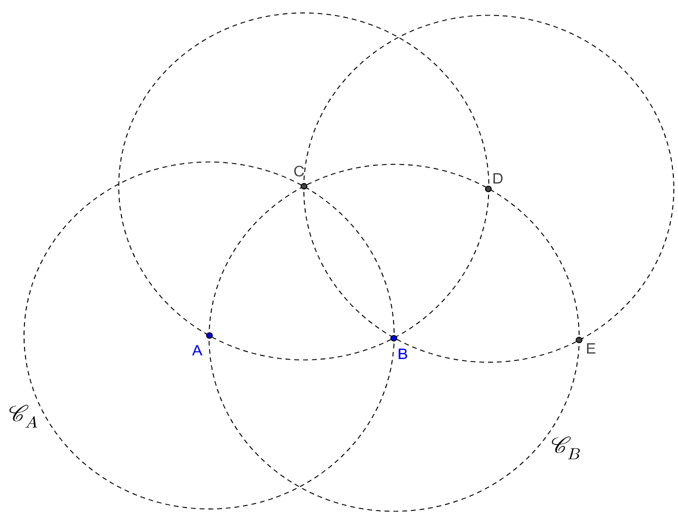
Nous notons $\mathscr{C}_B$ ce cercle et C l'un des points d'intersection des cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$.

→ Etape 3 : tracer le cercle de centre C et de rayon AB.



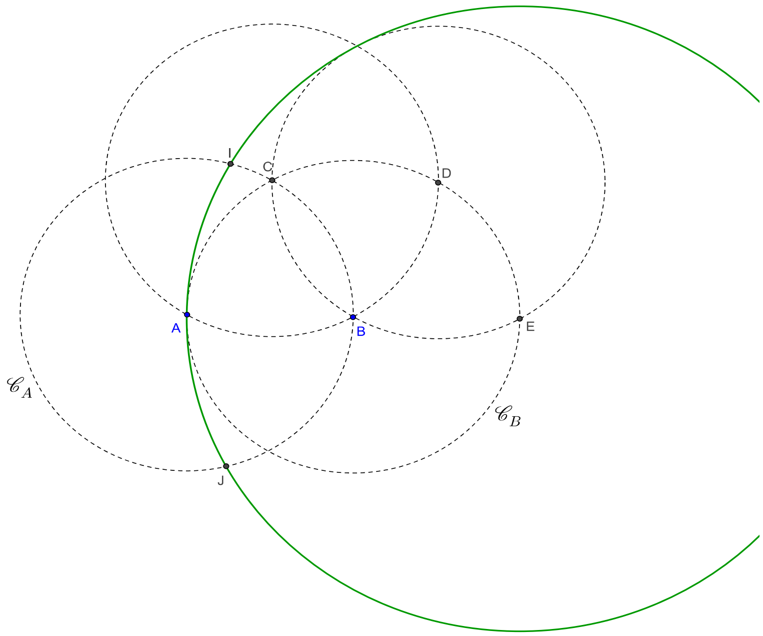
Ce cercle coupe $\mathscr{C}_B$ en A et le recoupe en un point que nous notons D.

→ Etape 4 : tracer le cercle de centre D et de rayon AB.



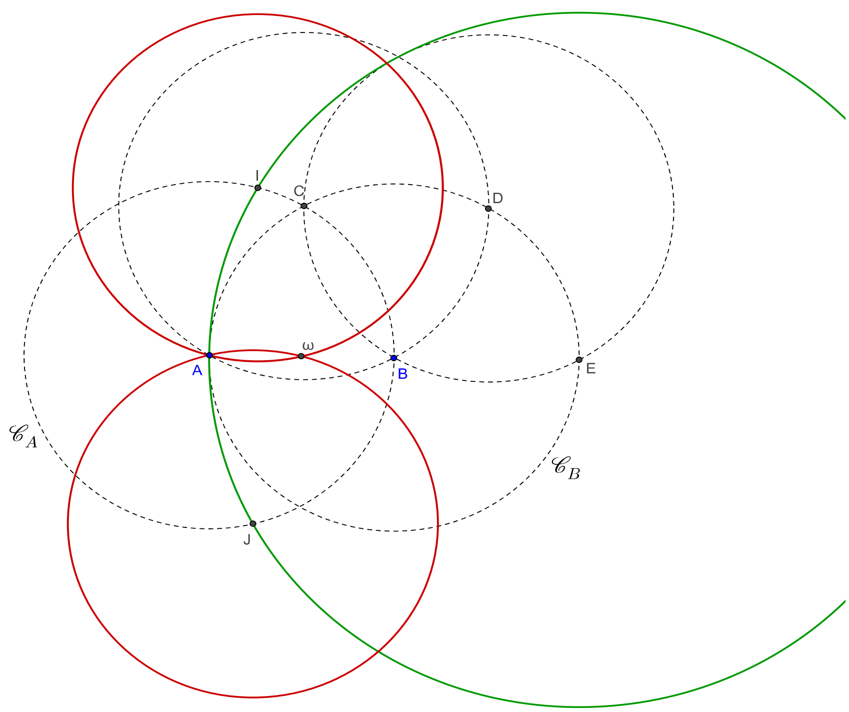
Ce cercle coupe $\mathscr{C}_B$ en C et le recoupe en un point que nous notons E.

→ Etape 5 : tracer le cercle de centre E et de rayon AE.



Ce cercle (en vert sur la figure) coupe le cercle $\mathscr{C}_{\text{A}}$ en deux points, notés I et J.

→ Etape 6 : tracer les cercles de centres I et J et de rayon AB.



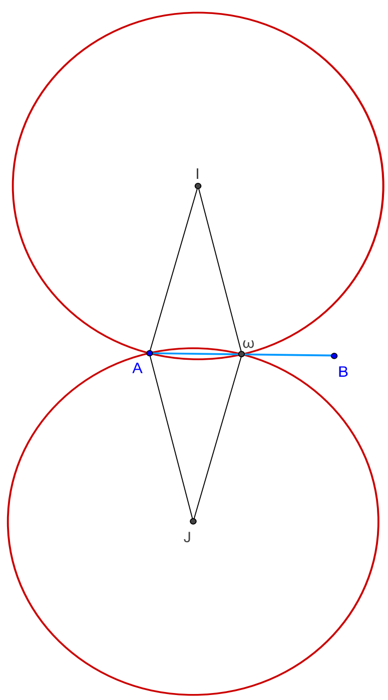
Ces deux cercles (en rouge sur la figure) se coupent au point A et au point ω qui est le milieu du segment $[\text{AB}]$!

Justification de la construction

A l'aide du compas et disposant du segment $[AB]$, on peut, très naturellement tracer des cercles de rayon AB (vous en avez été convaincu(e)s en reproduisant la construction ci-dessus …).

Bien que nous ne connaissions pas le point ω (nous cherchons à le construire !), nous pouvons raisonner avec !

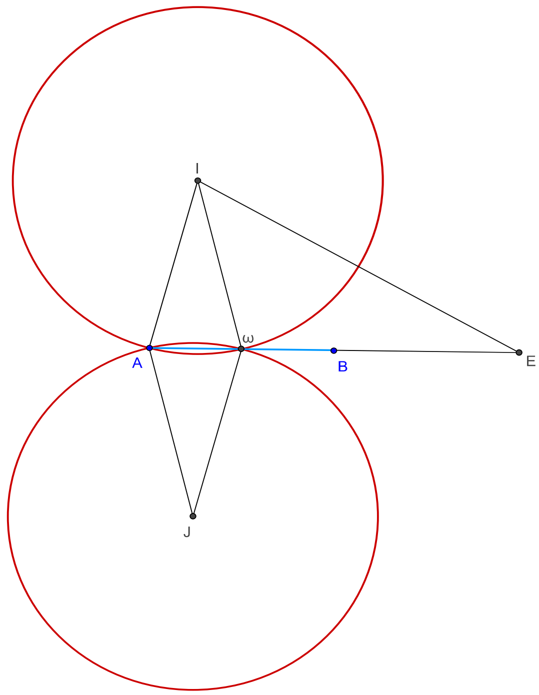
Par exemple, tout point M situé sur la médiatrice du segment $[A\omega]$ est équidistant de A et ω. Ainsi, le cercle de centre M et de rayon MA passera par ω ! Nous tenons-là une piste très intéressante : en effet, en supposant que l'on soit capable de construire les points I et J (voir figure ci-dessous) de la médiatrice du segment $[A\omega]$, situés à la distance AB des extrémités de ce segment, il suffira de tracer les cercles de centres I et J et de rayon AB pour obtenir le point ω (étape 6 de la construction).



Notre question fondamentale est désormais la suivante : comment peut-on construire les points I et J ?

Considérons le triangle $A\omega I$.
Comme $IA = I\omega$, nous avons affaire à un triangle isocèle en I.
Notons de surcroît que les côtés $[IA]$ et $[I\omega]$ sont deux fois plus long que la base $[A\omega]$.

Soit alors le point E, symétrique du point A par rapport au point B.
Considérons le triangle AIE (voir la figure ci-après).



Le côté $[\mathrm{AI}]$ du triangle AIE est deux fois plus long que le côté $[\mathrm{A}\omega]$ du triangle $\mathrm{A}\omega\mathrm{I}$ ($\mathrm{AI} = \mathrm{AB} = 2\mathrm{A}\omega$).
Le côté $[\mathrm{AE}]$ du triangle AIE est deux fois plus long que les côtés $[\mathrm{IA}]$ et $[\mathrm{I}\omega]$ du triangle $\mathrm{A}\omega\mathrm{I}$ ($\mathrm{AE} = 2\mathrm{AB} = 2\mathrm{IA} = 2\mathrm{I}\omega$).
Les angles $\widehat{\mathrm{IA}\omega}$ et $\widehat{\mathrm{IAE}}$ sont égaux.

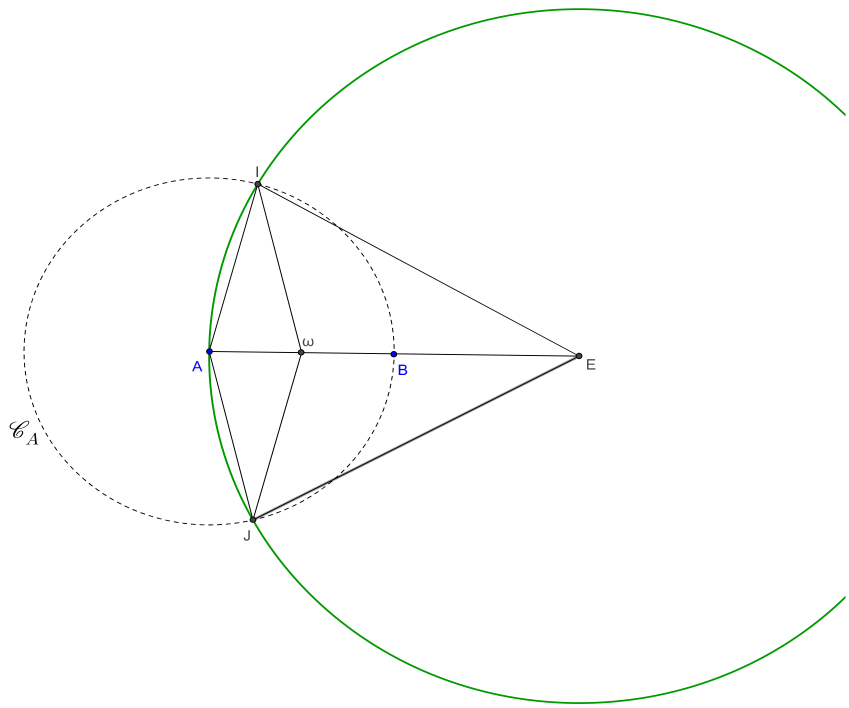
Il résulte de ce qui précède que les triangles $\mathrm{A}\omega\mathrm{I}$ et AIE sont semblables (ces deux triangles ont les mêmes angles. Plus précisément, le triangle $\mathrm{A}\omega\mathrm{I}$ est une réduction du triangle AIE, le coefficient de réduction valant 0,5).

Le triangle AIE est donc isocèle en E.

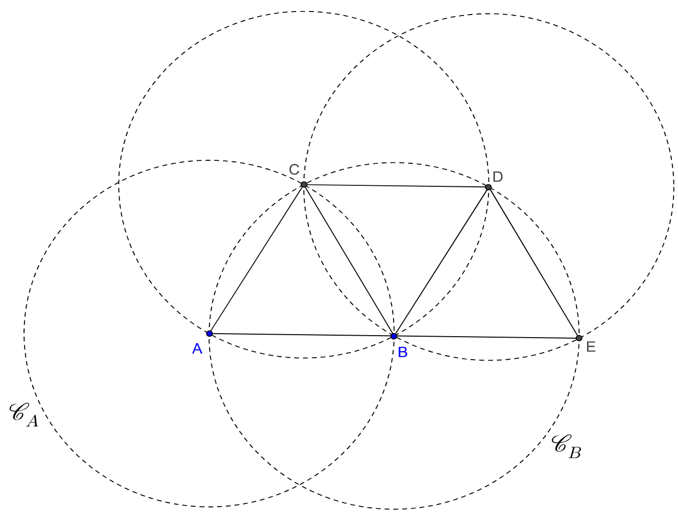
Disposant du point E, on obtiendra alors les points I et J comme intersections des cercles :

- De centre A et de rayon AB.
- De centre E et de rayon $2\mathrm{AB}$.

Voir la figure ci-après.



La dernière question qui se pose est alors la suivante : comment peut-on construire le point E ?



Le point E étant le symétrique du point A par rapport au point B, on a immédiatement $\widehat{\mathrm{ABE}} = 180°$.

Un angle plat peut être facilement construit à partir de trois angles adjacents de même mesure égale à 60°. Des tels angles apparaissent naturellement dans des triangles équilatéraux dont on prendra pour longueur de côté la longueur initialement disponible : celle du segment $[AB]$ (voir figure ci-dessus).

Ainsi, la construction du point ω se résume à :

- Construction du point E (étapes 1 à 4) ;
- Construction des points I et J (étape 5) ;
- Construction du point ω (étape 6).