Divisibilité et congruences.

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 445 : N°**1**, **5**
Page 449 : N°**10**
Page 451 : N°**16**
Page 458 : N°**29**, **30**, **31**, **34**, **38**
Page 459 : N°**45**
Page 460 : N°**51**, **52**, **55**, **57**
Page 461 : N°**61**, **62**

N°1 page 445

1. Supposons que k soit un diviseur commun à $n+4$ et $5n+21$.
Comme $5n+21=5(n+4)+1$, alors k divise nécessairement 1.
On en déduit immédiatement que k est égal à -1 ou 1.

Si l'entier k divise $n+4$ et $5n+21$ alors $k\in\{-1\,;1\}$.

2. D'après la question précédente, les entiers $n+4$ et $5n+21$ sont premiers entre eux. On en déduit immédiatement :

La fraction $\dfrac{5n+21}{n+4}$ est irréductible.

N°5 page 445

1. Les diviseurs propres de 284 dans $\mathbb{N}$ sont : 1, 2, 4, 71 et 142.
Leur somme vaut $S=1+2+4+71+142=220$.

2. Les diviseurs propres de S dans $\mathbb{N}$ sont :1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110.
Leur somme T vaut : $T=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$.
On constate que la somme des diviseurs propres de S est égale à l'entier initial : 284.

ATTENTION ! Ce résultat n'a rien de général ! Par exemple, les diviseurs propres de 10 sont 1, 2 et 5 et leur somme vaut 8. Elle admet elle-même comme diviseurs propres 1, 2 et 4 dont la somme vaut 7.

N°10 page 449

1. Comme suggéré dans l'énoncé, nous allons distinguer deux cas selon la parité de l'entier naturel *n*.

- Si *n* est pair
  Nous posons $n = 2k$.
  On a alors $n^2 = 4k^2$.
  Mais l'entier *k* peut être lui-même pair ou impair.
  Si $k = 2q$ alors $n^2 = 4k^2 = 4\times 4q^2 = 16q^2$ et n^2 est donc divisible par 8 (le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 vaut donc 0).
  Si $k = 2q+1$ alors $n^2 = 4k^2 = 4\times(2q+1)^2 = 16q^2+16q+4 = 8(2q^2+2q)+4$ et le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 vaut 4.

- Si *n* est impair
  Nous posons $n = 2k+1$.
  On a alors $n^2 = (2k+1)^2$.
  Si $k = 2q$ alors $n^2 = (2k+1)^2 = (4q+1)^2 = 16q^2+8q+1 = 8(2q^2+q)+1$ et le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 vaut 1.
  Si $k = 2q+1$ alors $n^2 = (2k+1)^2 = (4q+3)^2 = 16q^2+24q+9 = 8(2q^2+3q+1)+1$ et le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 vaut 1.

En définitive :

Le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 peut prendre les valeurs 0, 1 ou 4.

2. Si l'entier *n* est impair, il en va de même de n^2. Or n^4 est le carré de n^2. On a vu à la question précédente que le carré d'un entier impair admettait toujours 1 comme reste dans sa division euclidienne par 8. On en conclut donc que :

Lorsque *n* est impair, le reste de la division euclidienne de n^4 par 8 vaut 1.

N°16 page 451

1. Sans la calculatrice, on peut procéder comme suit (il est bon, de temps à autre, de refaire quelques multiplications … ☺).
   On a facilement $7\times 13 = 91$ donc, immédiatement : $70\times 13 = 910$.
   Comme $1000 = 910+90$ et que l'on a : $90 = 6\times 13+12$, on en déduit immédiatement :

$$1000 = 910+90 = 70\times 13+6\times 13+12 = 76\times 13+12$$

Le reste de la division euclidienne de 1000 par 13 est égal à 12.

2. D'après la question précédente, on a : $1000 \equiv 12\,(13)$, soit $10^3 \equiv 12\,(13)$.

   Soit encore : $10^3 \equiv -1\,(13)$.

   On en déduit alors, pour tout entier naturel n : $10^{3n} \equiv (-1)^n\,(13)$.

   On doit donc distinguer deux cas :

   - Si n est pair, on a $(-1)^n = 1$ et $10^{3n} \equiv 1\,(13)$. Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 est égal à 1.
   - Si n est impair, on a $(-1)^n = -1$ et $10^{3n} \equiv -1\,(13)$, soit $10^{3n} \equiv 12\,(13)$. Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 est égal à 12.

Si n est pair, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 est égal à 1 et s i n est impair, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 est égal à 12.

3. On peut, dans cette question procéder de diverses façons.

   <u>1ère méthode</u>

   On peut, assez « naturellement, utiliser le résultat de la question précédente.
   En effet, on a : $10^{3n+3} + 10^{3n} = 10^{3(n+1)} + 10^{3n}$.
   Quel que soit l'entier naturel n, n et $n+1$ sont de parités différentes : l'un est pair et l'autre impair. Ainsi, l'un est congru à 1 modulo 13 tandis que l'autre est congru à -1 modulo 13. Leur somme est donc congrue à $1+(-1)=0$ modulo 13. En d'autres termes, elle est divisible par 13.

   <u>2ème méthode</u>

   On peut aussi remarquer que l'on a : $10^{3n+3} + 10^{3n} = 10^{3n}\left(10^3+1\right) = 10^{3n} \times 1001$.

   Or, à la première question, on a vu que le reste de la division euclidienne de 1000 par 13 est égal à 12. On en déduit immédiatement que 1001 est divisible par 12 et qu'il en va évidemment de même pour $10^{3n} \times 1001 = 10^{3n+3} + 10^{3n}$.

Pour tout entier naturel n, $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

N°29 page 458

1. Les diviseurs positifs de 30 sont : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.
   Leur somme vaut : $s = 1+2+3+5+6+10+15+30 = 72$.
2. Les diviseurs positifs de 140 sont : 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70 et 140.
   Leurs somme vaut : $t = 1+2+4+5+7+10+14+20+28+35+70+140 = 336$.
3. On a : $\dfrac{s}{t} = \dfrac{72}{336} = \dfrac{3\times 24}{14\times 24} = \dfrac{3}{14} = \dfrac{30}{140}$.

N°30 page 458

En utilisant un programme donnant les diviseurs d'un entier positifs (cf. l'algorithme AlgoBox correspondant fourni sur panamaths.net), on obtient :

- Diviseurs de 135 : 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45 et 135. Leur somme vaut : 240.
- Diviseurs de 819 : 1, 3, 7, 9, 13, 21, 39, 63, 91, 117, 273 et 819. Leur somme vaut : 1456.

On a alors :

$$\frac{240}{1456}=\frac{15\times16}{91\times16}=\frac{15}{91}=\frac{15\times9}{91\times9}=\frac{135}{819}$$

Les entiers 135 et 819 sont amis.

N°31 page 458

On a facilement : $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)=\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$.

On constate ainsi que, pour tout entier n, n^3-n est le produit de trois, entiers consécutifs.
Lorsque nous disposons de deux entiers consécutifs, l'un des deux est pair. Il en va à fortiori de même lorsque nous disposons de trois entiers consécutifs.
Lorsque nous disposons de trois entiers consécutifs, l'un des trois est un multiple de trois.
En définitive, le produit $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$ est multiple de 2 et de 3. Il s'agit donc d'un multiple de 6.
Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier n, n^3-n est divisible par 6.

N°34 page 458

1. On suppose que 13 divise $7n+4$. Dans ces conditions, 13 divise également $2\left(7n+4\right)=14n+8=13\left(n+1\right)+n-5$.

   Comme $13\left(n+1\right)+n-5$ est un multiple de 13 alors nécessairement $n-5$ en est également un.

Si $7n+4$ est un multiple de 13 alors $n-5$ en est également un.

2. Supposons maintenant que $n-5$ soit un multiple de 13. Il existe donc un entier k tel que $n-5=13k$, soit $n=13k+5$.
   On a alors :

$$7n+4=7\left(13k+5\right)+4=13\times7k+35+4=13\times7k+39=13\times7k+13\times3=13\times\left(7k+3\right)$$

Ainsi, $7n+4$ est bien un multiple de 13.

Si $n-5$ est un multiple de 13 alors $7n+4$ en est également un.

N°38 page 458

Le rapport $\frac{11n-6}{3n+1}$ est entier si, et seulement si, $3n+1$ divise $11n-6$.

Or, on a : $11n-6=4(3n+1)-n-10=4(3n+1)-(n+10)$. Ainsi, $3n+1$ divise $11n-6$ si, et seulement si, $3n+1$ divise $n+10$.

La condition nécessaire $3n+1\leq n+10$ équivaut à $2n\leq 9$, soit, n étant un entier naturel, $n\leq 4$.

Pour $n=0$, $3n+1=1$ et $n+10=10$. 1 divise 10 et on retient la valeur 0 pour n.
Pour $n=1$, $3n+1=4$ et $n+10=11$. 4 ne divise pas 11 et on ne retient pas la valeur 1 pour n.
Pour $n=2$, $3n+1=7$ et $n+10=12$. 7 ne divise pas 12 et on ne retient pas la valeur 2 pour n.
Pour $n=3$, $3n+1=10$ et $n+10=13$. 10 ne divise pas 13 et on ne retient pas la valeur 3 pour n.
Pour $n=4$, $3n+1=13$ et $n+10=14$. 13 ne divise pas 14 et on ne retient pas la valeur 4 pour n.

Le rapport $\frac{11n-6}{3n+1}$ pour $n=0$.

Remarque : on pouvait également introduire la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\frac{11x-6}{3x+1}$. On montre facilement que cette fonction est strictement croissante. On a $f(0)=-6$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{11}{3}\simeq 3,67$. Or $f(1)=\frac{11\times1-6}{3\times1+1}=\frac{5}{4}=1,25\in\left]1\,;2\right[$, $f(2)=\frac{11\times2-6}{3\times2+1}=\frac{16}{7}\in\left]2\,;3\right[$, $f(3)=\frac{11\times3-6}{3\times3+1}=\frac{27}{10}=2,7\in\left]2\,;3\right[$, $f(4)=\frac{11\times4-6}{3\times4+1}=\frac{38}{13}=1,25\in\left]2\,;3\right[$ et, finalement, $f(5)=\frac{11\times5-6}{3\times5+1}=\frac{49}{16}>3$. On en déduit alors que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 5, on aura $f(n)=\frac{11n-6}{3n+1}\in\left]3\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[\subset\left]3\,;4\right[$. D'où $f(n)\notin\mathbb{N}$.

On retrouve ainsi le résultat précédent mais avec une approche plus analytique via l'introduction de la fonction *f*.

N°44 page 459

Comme $5\equiv-1(6)$, on a immédiatement : $5n\equiv-n(6)$ puis $n^3+5n\equiv n^3-n(6)$.

Or, on a : $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$.

Mais $n(n-1)(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs. Nécessairement l'un d'eux (au moins) est pair et exactement l'un d'eux est un multiple de 3. Ainsi, ce produit est divisible par 6 : $n(n-1)(n+1) \equiv 0\,(6)$ et donc $n^3+5n \equiv 0\,(6)$.
Le résultat est ainsi établi.

$$\forall \in \mathbb{N}, n^3+5n \text{ est divisible par 6.}$$

N°45 page 459

Pour tout entier naturel *n*, on pose :

$$\mathscr{P}_n : \text{« } 3^{2n+1}+2^{n+2} \text{ est divisible par 7 »}$$

<u>Initialisation</u>
Pour $n=0$, on a : $3^{2n+1}+2^{n+2}=3^{2\times 0+1}+2^{0+2}=3^1+2^2=2+4=7$ qui est bien divisible par 7.
La propriété est initialisée (la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie).

<u>Hérédité</u>
Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.
On suppose que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie et on s'intéresse à la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$.
On va donc étudier la divisibilité par 7 de $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$.
On a : $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}$.
Comme la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ peut s'écrire : $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$ (où *k* est un entier naturel), soit $3^{2n+1}=7k-2^{n+2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2} &= 3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2} \\
&= 9\times\left(7k-2^{n+2}\right)+2\times 2^{n+2} \\
&= 7\times 9k-9\times 2^{n+2}+2\times 2^{n+2} \\
&= 7\times 9k-7\times 2^{n+2} \\
&= 7\times\left(9k-2^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ est bien divisible par 7 : la propriété est héréditaire ($\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie).

<u>Conclusion générale</u>
Pour tout entier naturel *n*, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Le résultat est ainsi établi.

$$\forall \in \mathbb{N}, 3^{2n+1}+2^{n+2} \text{ est divisible par 7.}$$

N°51 page 460

On a :

$$\begin{aligned}228 &= 2\times 114\\ &= 2\times 2\times 57\\ &= 2^2\times 3\times 19\end{aligned}$$

$$\boxed{228 = 2^2\times 3\times 19}$$

$$\begin{aligned}1\,210 &= 2\times 605\\ &= 2\times 5\times 121\\ &= 2\times 5\times 11^2\end{aligned}$$

$$\boxed{1\,210 = 2\times 5\times 11^2}$$

$$\begin{aligned}3\,267 &= 3^2\times 363\\ &= 3^2\times 3\times 121\\ &= 3^3\times 11^2\end{aligned}$$

$$\boxed{3\,267 = 3^3\times 11^2}$$

$$\begin{aligned}14\,800 &= 2^2\times 3700\\ &= 2^2\times 2^2\times 925\\ &= 2^4\times 5^2\times 37\end{aligned}$$

$$\boxed{14\,800 = 2^4\times 5^2\times 37}$$

$$\begin{aligned}884\,058 &= 2\times 442\,029\\ &= 2\times 3\times 147\,343\\ &= 2\times 3\times 7\times 21049\\ &= 2\times 3\times 7\times 7\times 3007\\ &= 2\times 3\times 7^2\times 31\times 97\end{aligned}$$

$$\boxed{884\,058 = 2\times 3\times 7^2\times 31\times 97}$$

N°52 page 460

1. On a d'abord : $28 = 2\times 14 = 2\times 2\times 7 = 2^2\times 7$.

Puis : $126 = 2\times 63 = 2\times 3\times 21 = 2\times 3\times 3\times 7 = 2\times 3^2 \times 7$.

$$\boxed{28 = 2^2 \times 7 \text{ et } 126 = 2\times 3^2 \times 7}$$

2. En utilisant les décompositions précédentes, il vient :
   a. $28^2 = \left(2^2 \times 7\right)^2 = \boxed{2^4 \times 7^2}$
   b. $28\times 126 = 2^2 \times 7\times 2\times 3^2 \times 7 = 2^2 \times 2\times 3^2 \times 7\times 7 = \boxed{2^3 \times 3^2 \times 7^2}$
   c. $126^3 = \left(2\times 3^2 \times 7\right)^3 = \boxed{2^3 \times 3^6 \times 7^3}$
   d. On a d'abord : $2\,828 = 28\times 101$.
   L'énoncé nous précise que 101 est premier. On en déduit donc immédiatement :
   $$2\,828 = 28\times 101 = \boxed{2^2 \times 7\times 101}$$

N°55 page 460

1. 3 étant le seul diviseur premier de n, sa décomposition en facteurs premiers est donc de la forme :

$$\boxed{n = 3^\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}^*}$$

2. Les diviseurs de *n* sont de la forme 3^m où *m* est un entier naturel compris entre 0 et α .
   L'entier *n* admet donc $\alpha + 1$ diviseurs. Comme *n* admet 5 diviseurs, on en déduit que α vaut 4 et que *n* vaut $3^4 = 81$. Les diviseurs de n sont : 1, 3, 9, 27 et 81.

$$\boxed{n = 3^4 = 81}$$

N°57 page 460

1. Soit *p* un diviseur premier de *d*.
   On a donc : $d = p\times s$ où *s* est un entier naturel non nul.
   Mais *d* étant un diviseur de *n*, on a : $n = d\times t$ où *t* est un entier naturel non nul.
   On a donc : $n = d\times t = p\times s\times t$.
   Ainsi, *p* est un diviseur premier de *n* et apparaîtra donc dans sa décomposition en facteurs premiers qui est unique. Nécessairement, *p* est l'un des p_i .

$$\boxed{p \in \left\{ p_1,\ p_2, ...,\ p_m \right\}}$$

2. Nous supposons que p_i apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de *d* avec un exposant égal à β_i. On a donc : $d = p_i^{\beta_i} \times d'$ où β_i est supérieur ou égal à 1 et où p_i ne divise pas d'.
Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on a : $\beta_i > \alpha_i$.
On a : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \times p_i^{\alpha_i} \times p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \times ... \times p_m^{\alpha_m} = d \times t = p_i^{\beta_i} \times d' \times t$.
Comme on a supposé $\beta_i > \alpha_i$, on peut simplifier par $p_i^{\alpha_i}$ et on obtient :
$$\frac{n}{p_i^{\alpha_i}} = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \times p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \times ... \times p_m^{\alpha_m} = p_i^{\beta_i - \alpha_i} \times d' \times t$$
On en conclut alors que $p_i^{\beta_i - \alpha_i}$ apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \times p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \times ... \times p_m^{\alpha_m}$, ce qui est absurde (unicité de la décomposition en facteurs premiers). Finalement, on a : $\beta_i \leq \alpha_i$.

Si p_i figure dans la décomposition de *d* en facteurs premiers alors son exposant est inférieur ou égal à α_i.

3. D'après la question 1, un diviseur premier de *d* est également un diviseur premier de *n* (Attention ! La réciproque est fausse !). Ainsi, dans la décomposition en facteurs premiers de *d* n'apparaissent que des diviseurs de *n*. Si p_i n'apparaît pas, par exemple, il suffit, formellement de lui attribuer un exposant nul.
Alors, la décomposition de d en facteurs premiers est de la forme :
$$d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_m^{\beta_m}$$
Avec, éventuellement, tout ou partie des β_i nuls.
D'après la question précédente, on sait aussi que l'on a : $\beta_i \leq \alpha_i$.
En définitive :

$d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_m^{\beta_m}$ avec $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

4. D'après la question précédente, pour obtenir un diviseur de *n*, il suffit de choisir les *m* entiers β_i. On a vu également que, pour *i* fixé, β_i pouvait prendre n'importe quelle valeur entre 0 et α_i, soit $\alpha_i + 1$ valeurs.
Pour β_1 on a donc $\alpha_1 + 1$ choix possibles, pour β_2 on a donc $\alpha_2 + 1$ choix possibles, etc.
Ces choix étant indépendants, pour les *m* entiers β_i, on a $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times ... \times (\alpha_m + 1)$ choix possibles. C'est le nombre total de diviseurs de *n*.

Le nombre de diviseurs de $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_m^{\alpha_m}$ est égal à : $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times ... \times (\alpha_m + 1)$

N°61 page 461

La décomposition en facteurs premiers de *n* est de la forme : $n = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ où α et β sont deux entiers naturels non nuls.
D'après l'exercice 57, le nombre total de diviseurs de *n* vaut $(1+\alpha)(1+\beta)$.

1. On a ici : $(1+\alpha)(1+\beta) = 4$.
   Comme α et β sont non nuls, on a nécessairement : $1+\alpha \geq 2$ et $1+\beta \geq 2$.
   Si un de ces deux inégalités est stricte alors on a $(1+\alpha)(1+\beta) > 4$. Ce qui est absurde puisque $(1+\alpha)(1+\beta) = 4$.
   On a donc $1+\alpha = 2$ et $1+\beta = 2$, c'est-à-dire : $\alpha = \beta = 1$.
   Finalement :

$$\boxed{n = 2^1 \times 3^1 = 6}$$

   Remarque : les 4 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3 et 6.

2. On a ici : $(1+\alpha)(1+\beta) = 6$.
   Comme $1+\alpha \geq 2$ et $1+\beta \geq 2$, il vient : $\{1+\alpha = 2 \text{ et } 1+\beta = 3\}$ ou $\{1+\alpha = 3 \text{ et } 1+\beta = 2\}$.

   1^er^ cas : $1+\alpha = 2 \text{ et } 1+\beta = 3$
   Alors $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Donc $n = 2^1 \times 3^2 = 18$.
   Les 6 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

   2^ème^ cas : $1+\alpha = 3 \text{ et } 1+\beta = 2$
   Alors $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. Donc $n = 2^2 \times 3^1 = 12$.
   Les 6 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

$$\boxed{n = 2^1 \times 3^2 = 18 \text{ ou } n = 2^2 \times 3^1 = 12.}$$

3. On a ici : $(1+\alpha)(1+\beta) = 18$.
   Comme $1+\alpha \geq 2$ et $1+\beta \geq 2$, il vient : $\{1+\alpha = 2 \text{ et } 1+\beta = 9\}$ ou $\{1+\alpha = 9 \text{ et } 1+\beta = 2\}$ ou $\{1+\alpha = 3 \text{ et } 1+\beta = 6\}$ ou $\{1+\alpha = 6 \text{ et } 1+\beta = 3\}$.

   1^er^ cas : $1+\alpha = 2 \text{ et } 1+\beta = 9$
   Alors $\alpha = 1$ et $\beta = 8$. Donc $n = 2^1 \times 3^8 = 13122$.
   Les 18 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162, 243, 486, 729, 1 458, 2 187, 4 374, 6 561 et 13 122.

$2^{\text{ème}}$ cas : $1+\alpha=9$ et $1+\beta=2$

Alors $\alpha=8$ et $\beta=1$. Donc $n=2^8\times 3^1=768$.

Les 18 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192, 256, 384 et 768.

$3^{\text{ème}}$ cas : $1+\alpha=3$ et $1+\beta=6$

Alors $\alpha=2$ et $\beta=5$. Donc $n=2^2\times 3^5=972$.

Les 18 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 243, 324, 486 et 13 122.

$3^{\text{ème}}$ cas : $1+\alpha=6$ et $1+\beta=3$

Alors $\alpha=5$ et $\beta=2$. Donc $n=2^5\times 3^2=288$.

Les 18 diviseurs de *n* sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 72, 96, 144 et 288.

$$\boxed{n=2^1\times 3^8=13\,122\,,\ n=2^8\times 3^1=768\,,\ n=2^2\times 3^5=972\ \text{ ou }\ n=2^5\times 3^2=288\,.}$$

N°62 page 461

Soit *n* l'entier naturel cherché.

On a $28=2\times 2\times 7$.
A partir de là (cf. l'exercice 57), on peut obtenir diverses combinaison d'exposants apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de *n* (par exemple 6-3 ou 1-1-6). Nous allons raisonner sur le nombre de facteurs premiers apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier *n*.

Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre premier dans la décomposition de *n*. Puisque l'on cherche le plus petit entier possible, ce facteur est égal à 2 : $n=2^\alpha$. Mais alors, d'après l'exercice 57, on a $28=1+\alpha$, soit : $\alpha=27$. On obtient alors : $n=2^{27}$ qui est … très grand :

$$2^{27}=134\,217\,728$$

Supposons maintenant qu'il y ait deux nombres premiers dans la décomposition de *n*. Puisque l'on cherche le plus petit entier possible, ces facteur sont égaux à 2 et 3 : $n=2^\alpha 3^\beta$. Pour obtenir l'entier de cette forme le plus petit possible, on va imposer $\alpha>\beta$.

D'après l'exercice 57, on a $28=(1+\alpha)(1+\beta)$. Comme $\alpha>\beta$, on a : $1+\alpha>1+\beta$.

A partir de $28=2\times 14=4\times 7$, on obtient deux possibilités :

- $2^{13}\times 3^1=24\,576<134\,217\,728$
- $2^6\times 3^3=1\,728<24\,576$

Remarque : on pouvait « directement » obtenir cette deuxième solution en notant que le nombre n sera d'autant plus petit que la somme des exposants (qui donne le nombre total de facteurs apparaissant dans le produit) est faible. Ainsi la solution 6-3 est meilleure que la solution 13-1 car $6+3<13+1$.

Supposons enfin qu'il y ait trois nombres premiers dans la décomposition de *n*. Puisque l'on cherche le plus petit entier possible, ces facteur sont égaux à 2, 3 et 5 : $n = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$.
Comme $28 = 2\times2\times7$, deux des trois exposants seront égaux à 1 et le troisième à 6.
Le plus petit entier est alors obtenu avec $\alpha = 6$ et $\beta = \gamma = 1$.
On obtient : $2^6 \times 3\times 5 = 64\times 15 = 960 < 1\,728$.

$$\boxed{\text{Le plus petit entier naturel admettant exactement 28 diviseurs est 960.}}$$

Remarque : les 28 diviseurs de 960 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80, 96, 120, 160, 192, 240, 320, 480 et 960.