Durée 4 heures.
La calculatrice graphique est autorisée.
Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 (commun) [6 points]

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (*unité graphique : 1 cm*).

A. Etude de f en + ∞.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2) a. Vérifier que pour tout $x > 0$:
$$f(x)-x-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1.$$
   b. En déduire la limite de $f(x)-x-1$ en $+\infty$.
   Que dire alors de la droite Δ d'équation $y = x+1$?
3) a. En étudiant les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=e^t-t-1$, prouver que $\forall\, t\in\mathbb{R},\ e^t-t-1\geq 0$.
   b. Montrer alors que pour tout $x > 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

B. Etude de f en – ∞.

Déterminer la limite de f en $-\infty$.

On admet que la droite Δ est aussi asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et que pour tout $x < 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

C. Etude de f en 0.

1) Déterminer les limites à droite et à gauche de f en 0.
2) La fonction f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ? Justifier brièvement.
3) Démontrer que f est dérivable à gauche en 0.
4) Déterminer une équation de T, la demi-tangente à gauche à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

D. Fin de l'étude de f.

1) Etudier les variations de f et construire son tableau de variations complet sur $\mathbb{R}$.
2) Construire les droites Δ et T et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 2 (commun) [5 points]

Soit la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^3+1}$.

On appelle F la primitive du f sur $[1\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 (*on ne cherchera pas à déterminer l'expression de* F). On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de F dans un repère.

1) Déterminer le sens de variation de F sur $[1\,;+\infty[$.
2) a) Soit a un réel fixé tel que $a \geq 0$. Prouver par récurrence sur n que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$$(1+a)^n \geq 1+na.$$
   b) En prenant $n=3$ et en posant $x=1+a$, déduire du résultat précédent que $\forall\, x \geq 1$:
$$x^3+1 \geq 3x-1.$$
3) On appelle g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{3x-1}$ et G la primitive de g qui s'annule en 1.
   a) Montrer à l'aide de la question précédente que $F-G$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
   b) En déduire que $\forall\, x \geq 1$, $F(x) \geq G(x)$.
   c) Déterminer G(x).
   d) Déterminer alors la limite de F quand x tend vers $+\infty$.
4) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_F$ au point d'abscisse 1. On admet que $\mathcal{C}_F$ est au dessus de cette tangente.
5) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_F$ à l'aide de tous les résultats précédents.

Exercice 3 (commun) [4 points]

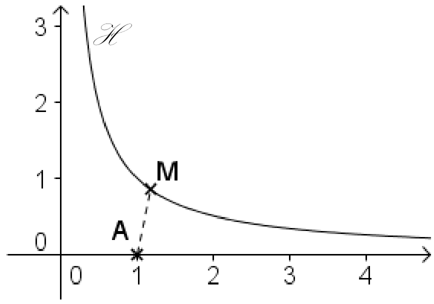
Un professeur de physique (ou est-ce de Maths ?) particulièrement retors (voire totalement sadique) construit un circuit mettant en série une bobine d'inductance L (exprimée en Henrys), une résistance R (exprimée en Ohms) et un générateur de tension variable U(t) (exprimée en Volts) de telle sorte que l'intensité i(t) du courant à l'instant t (exprimé en Ampères) vérifie l'équation :
$$Li'(t)+Ri(t)=U(t).$$

On donne $U(t)=U_o e^{-t}\sin t$ avec $U_o=20\ \text{V}$, $R=10\ \Omega$ et $L=5\ \text{H}$.

1) Justifier que la fonction i est solution de l'équation différentielle :
$$(E):\ y'+2y=4e^{-t}\sin t.$$
2) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie par $g(t)=e^{-t}(a\cos t+b\sin t)$ soit solution de (E).
3) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'+2y=0$.
4) Résoudre (E').
5) A t = 0, l'intensité du courant dans le circuit vaut 2 Ampères. Déterminer l'intensité du courant au bout de 10 millisecondes (alias pas beaucoup de secondes en unités S.I.)

Exercice 4 (NON spécialité Mathématiques uniquement) [5 points]

Le graphique ci-dessous représente la branche d'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ dans un repère orthogonal. On considère le point $A(1;0)$ et on appelle M le point de $\mathscr{H}$ de coordonnées $\left(x ; \frac{1}{x}\right)$.



Le but de cet exercice est déterminer la position de M sur $\mathscr{H}$ pour laquelle la distance AM est minimale.

1) Justifier brièvement que « AM est minimale » si et seulement si « AM² est minimale ».
2) On pose $d(x) = AM^2$. Exprimer $d(x)$ en fonction de x.
3) Après avoir justifié que la fonction d est dérivable sur $]0;+\infty[$, montrer que sur cet intervalle, $d'(x)$ a le même signe que la fonction f définie par $f(x) = x^4 - x^3 - 1$.
4) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et déterminer un encadrement α d'amplitude 10^{-2}.
6) Déduire de ce qui précède les variations de d sur $]0;+\infty[$ et conclure.
7) Prouver que si M est le point de $\mathscr{H}$ le plus proche de A alors (AM) est perpendiculaire à la tangente à $\mathscr{H}$ en M.

Exercice 4 (spécialité mathématiques uniquement) [5 points]

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \ (2^n)$.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant r et R les restes de la division euclidienne par 8 de m et de m² respectivement.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 7 \ (8)$?

Partie B : Étude du cas général où n ≥ 3

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n-1 \ (2^n)$.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x=2q$, $y=2r$, $z=2s+1$ où q, r, s sont des entiers naturels.
   a. Montrer que $x^2+y^2+z^2 \equiv 1 \ (4)$.

   b. En déduire une contradiction.
3. On suppose que x, y, z sont impairs.
   a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, k^2+k est divisible par 2.

   b. En déduire que $x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \ (8)$.

   c. Conclure.

FIN DU SUJET