Suite des polynômes de Tchebychev.
(Exercice N°127 page 87)

Corrigé

1. a. En utilisant la relation de récurrence avec $n = 2$, on obtient :

$$f_2(x) = 2x\, f_1(x) - f_0(x) = 2x \times x - 1 = 2x^2 - 1$$

Puis, pour $n = 3$:

$$f_3(x) = 2x\, f_2(x) - f_1(x) = 2x \times \left(2x^2 - 1\right) - x = 4x^3 - 3x.$$

Enfin, pour $n = 4$:

$$f_4(x) = 2x\, f_3(x) - f_2(x) = 2x \times \left(4x^3 - 3x\right) - \left(2x^2 - 1\right) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

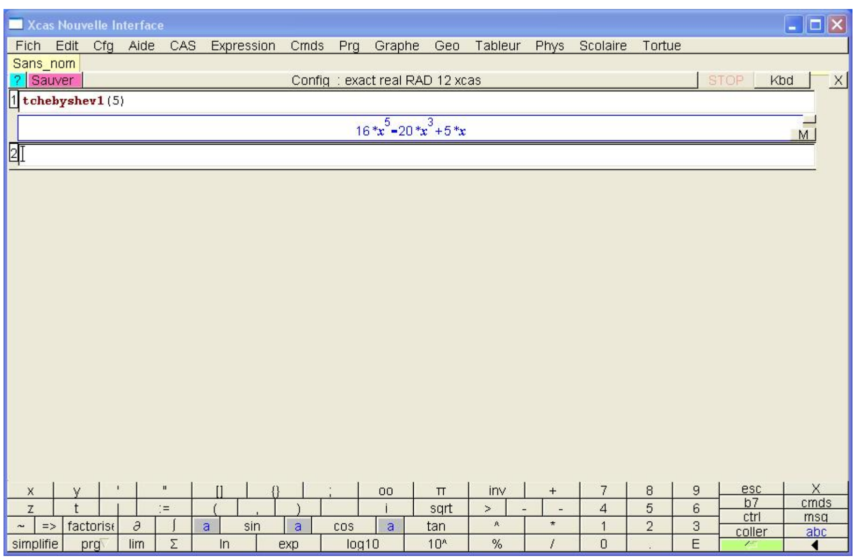
On a bien :

$$\boxed{\begin{array}{c} f_2(x) = 2x^2 - 1 \\ f_3(x) = 4x^3 - 3x \\ f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{array}}$$

b. On procède comme précédemment avec $n = 5$:

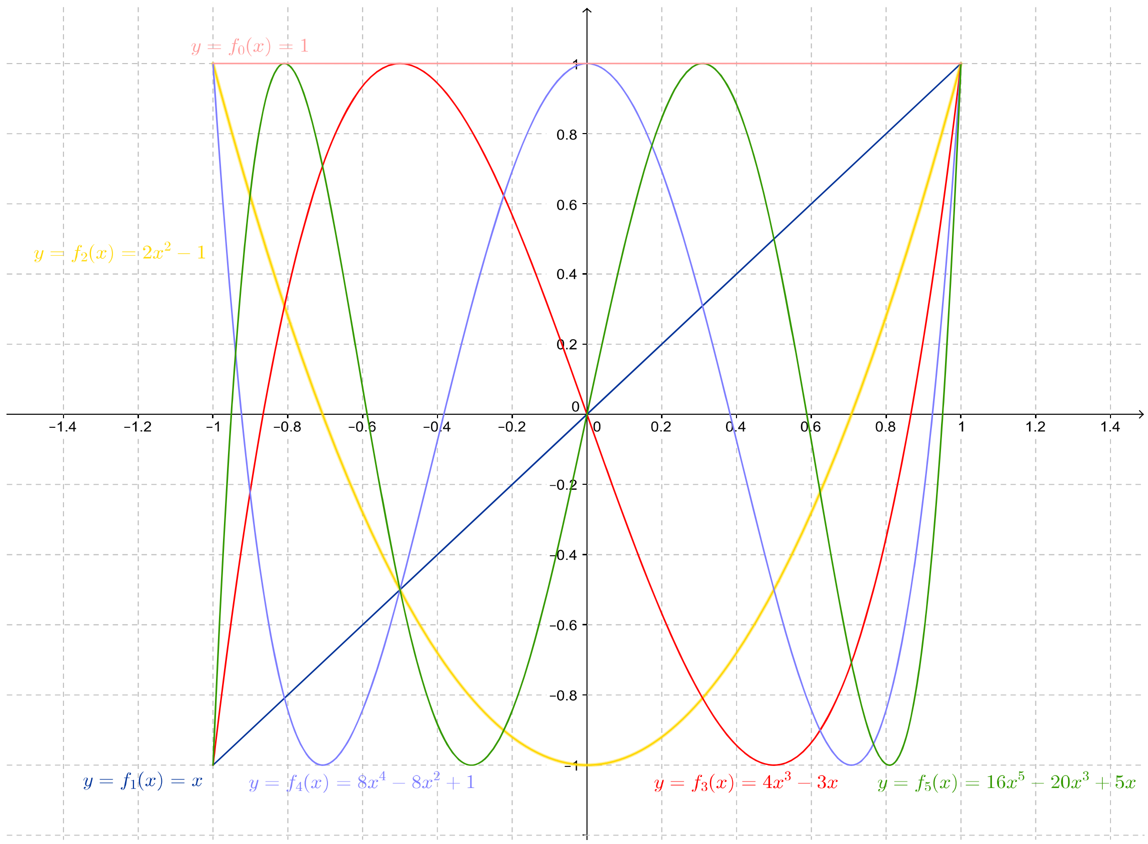
$$f_5(x) = 2x\, f_4(x) - f_3(x) = 2x\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) - \left(4x^3 - 3x\right) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Avec le logiciel Xcas, on retrouve bien ce résultat :



$$\boxed{f_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x}$$

2. On utilise cette fois le logiciel Geogebra pour obtenir la figure suivante :



D'après le graphique ci-dessus, on peut émettre la conjecture suivante :

L'équation $f_n(x) = 0$ admet n solutions distinctes sur l'intervalle $[-1;1]$.

3. a. Pour tout entier naturel n, nous posons $\mathscr{P}_n$: « $f_n(\cos x) = \cos(nx)$ ».

Le raisonnement par récurrence que nous allons mener ci-dessous est appelé « raisonnement par récurrence d'ordre 2 » et nous est « imposé » par la relation de récurrence existant entre f_n, f_{n-1} et f_{n-2}. On doit ici initialiser le raisonnement en validant deux propriétés (ici $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$) puis, à l'étape de l'hérédité, on supposera deux propriétés, de rangs successifs, vraies (ici $\mathscr{P}_N$ et $\mathscr{P}_{N+1}$) et on cherchera, classiquement, à montrer que la suivante ($\mathscr{P}_{N+2}$) l'est également. Dans certaines situations, on pourra mener un raisonnement par récurrence d'ordre 3, 4, etc.

<u>Initialisation</u>

Pour $n=0$, on a : $f_0(\cos x)=1$ et $\cos(0\times x)=\cos 0=1$.

On a bien $f_0(\cos x)=\cos(0\times x)$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Pour $n=1$, on a : $f_1(\cos x)=\cos x$ et $\cos(1\times x)=\cos x$.

On a bien $f_1(\cos x)=\cos(1\times x)$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit N un entier naturel quelconque fixé.

On suppose les propriétés $\mathscr{P}_N$ et $\mathscr{P}_{N+1}$ vraies (cette forme du raisonnement par récurrence est appelé « raisonnement par récurrence d'ordre 2 »).

On s'intéresse à $\mathscr{P}_{N+2}$.

On veut montrer $f_{N+2}(\cos x)=\cos\left[(N+2)x\right]$.

D'après la relation de récurrence existant entre f_n, f_{n-1} et f_{n-2} on peut écrire :

$$\begin{aligned}f_{N+2}(\cos x)&=2\cos x\times f_{N+1}(\cos x)-f_N(\cos x)\\&=2\cos x\times\cos\left[(N+1)x\right]-\cos(Nx)\end{aligned}$$

L'énoncé nous rappelle que l'on a, pour tous réels a et b :

$$2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$$

(Remarquons que cette égalité s'obtient très facilement à partir de l'égalité $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ et de l'égalité $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ qui découle de la première en remplaçant b par « $-b$ »).

Avec $a=x$ et $b=(N+1)x$, on obtient, en tenant compte de la parité de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned}2\cos x\times\cos\left[(N+1)x\right]&=\cos\left[x+(N+1)x\right]+\cos\left[x-(N+1)x\right]\\&=\cos\left[(N+2)x\right]+\cos(-Nx)\\&=\cos\left[(N+2)x\right]+\cos(Nx)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}f_{N+2}(\cos x)&=2\cos x\times\cos\left[(N+1)x\right]-\cos(Nx)\\&=\cos\left[(N+2)x\right]+\cos(Nx)-\cos(Nx)\\&=\cos\left[(N+2)x\right]\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{N+2}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\left(\cos x\right) = \cos\left(nx\right)}$$

b. On cherche ici à résoudre $f_n\left(x\right) = 0$.

Comme on travaille sur l'intervalle $\left[-1\,;1\right]$, on peut effectuer un changement de variable : pour tout réel x compris entre -1 et 1, il existe un unique réel t compris entre 0 et π tel que $x = \cos t$ (ceci découle directement du théorème de la bijection appliqué à la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$). On a alors :

$$f_n\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f_n\left(\cos t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(nt\right) = 0$$

Evidemment, pour $n = 0$, on a, pour tout réel t de l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$, $\cos\left(nt\right) = \cos\left(0\times t\right) = \cos\left(0\right) = 1$. Ainsi, l'équation $\cos\left(nt\right) = 0$ n'admet, dans ce cas, aucune solution.

Nous supposons donc, désormais : $n \neq 0$.

Dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\cos\left(nt\right) = 0 \Leftrightarrow nt = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow nt = \frac{k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{2k+1}{2n}\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pour obtenir des solutions dans l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$, on ne retient que les valeurs de k telles que : $0 \leq \frac{2k+1}{2n}\pi \leq \pi$.

On a alors, en tenant compte du fait que k est un entier :

$$0 \leq \frac{2k+1}{2n}\pi \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \left(2k+1\right)\pi \leq 2n\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 2n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq n-1$$

Les valeurs possibles de k sont donc : 0, 1, … $n-2$ et $n-1$ et il y en a exactement n.

Ainsi, dans l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$, l'équation $\cos\left(nt\right) = 0$ admet pour solutions les réels $\frac{2k+1}{2n}\pi$ avec k entier naturel dans $[\![0\,;n-1]\!]$.

Pour chaque valeur de t ainsi obtenue, on obtient une solution de l'équation $f_n\left(x\right) = 0$ en posant $x = \cos t$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $f_n(x)=0$ est :

$$\mathscr{S}_n=\left\{\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), k\in[\![0\,;n-1]\!]\right\}$$

Par exemple, pour $n=5$, les 5 solutions de l'équation $f_5(x)=0$ sont : $\cos\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{5\pi}{10}$, $\cos\frac{7\pi}{10}$ et $\cos\frac{9\pi}{10}$.

> Pour toute valeur de l'entier naturel *n*, l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement *n* solutions dans l'intervalle $[0\,;\pi]$:
>
> $$f_n(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2k+1}{2n}\pi, k\in[\![0\,;n-1]\!]$$

Bien que les polynômes de Tchebychev conduisent à des mathématiques dépassant nettement le programme de la classe de Terminale S, je ne résiste pas au plaisir d'apporter quelques compléments à ce qui précède :

- Les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce sont classiquement notés T_n et non f_n (mais ce n'est pas très grave ! ☺).
- Si l'on évoque les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce, c'est parce qu'il existe des polynômes de Tchebychev de 2ème espèce ! Ces derniers, classiquement notés U_n sont définis sur l'intervalle $[-1\,;1]$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} U_0(x)=1, U_1(x)=2x \\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+2}(x)=2xU_{n+1}(x)+U_n(x) \end{cases}$$

  Ainsi, on notera que la relation de récurrence est commune aux deux familles. Mais le fait d'avoir $T_1\neq U_1$ change beaucoup de choses !

- On peut donner une définition explicite de T_n :

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

  On retrouve le fait que T_n est de degré *n* et ne comporte que des monômes de degrés de même parité que celle de *n*.

- Pour finir, une belle relation, valable pour tous entiers naturels *n* et *m* :

$$T_n\left[T_m(x)\right]=T_m\left[T_n(x)\right]=T_{mn}(x)$$