La fonction exponentielle de base a

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 157 : N°**48**, **49**, **54**, **56**
Page 162 : N°**107**, **109**
Page 163 : N°**114**
Page 164 : N°**120**
Page 165 : N°**127**

N°48 page 157

$$f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$$

1. Pour tout *x* non nul, on a : $f(x) = 3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\times\ln 3}$.

   La fonction $x \mapsto \frac{\ln 3}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (fonction proportionnelle à la fonction inverse). La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Finalement, la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

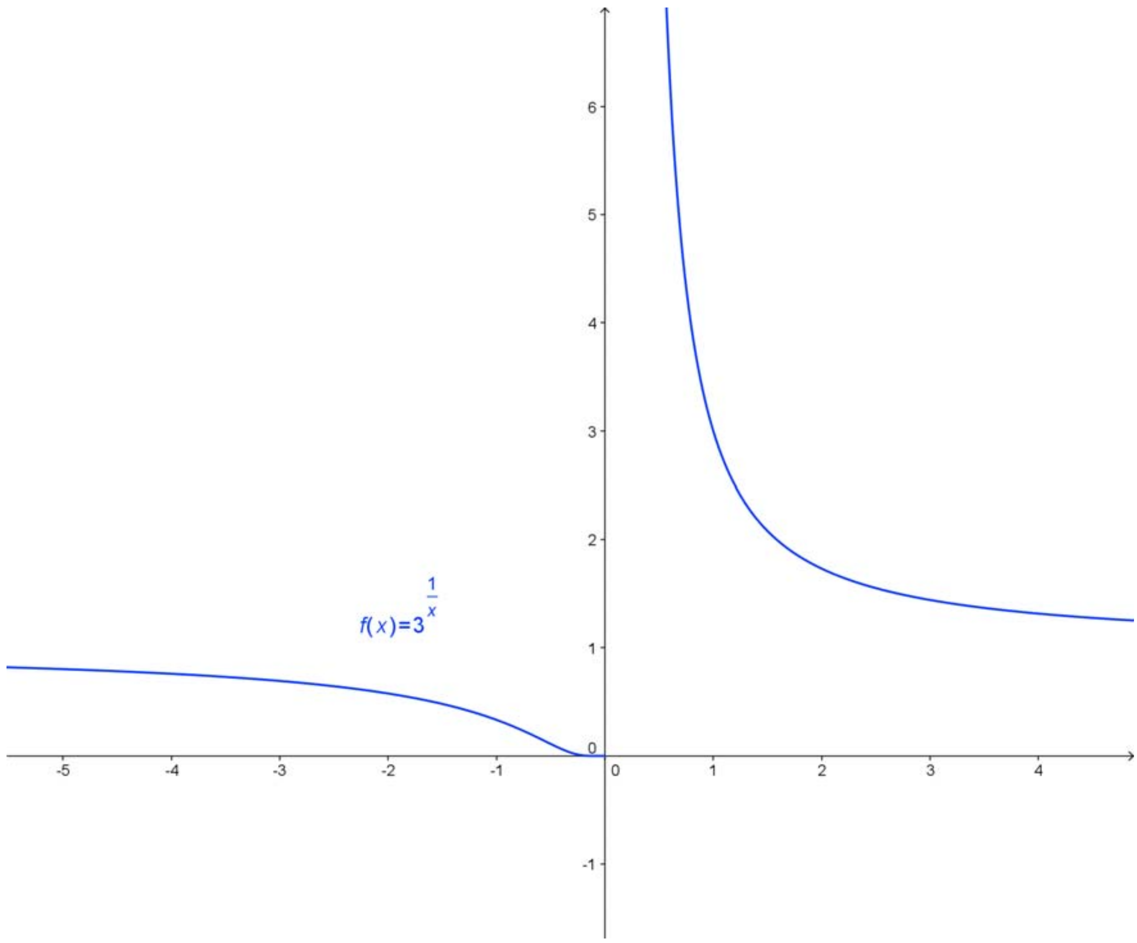
   Nous dérivons alors *f* en tant que composée et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\frac{\ln 3}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}\times\ln 3} = -\frac{\ln 3}{x^2} \times 3^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\frac{\ln 3}{x^2} \times 3^{\frac{1}{x}}}$$

2. Comme : $3 > 1$, on a : $\ln 3 > 0$. Or, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ -\frac{1}{x^2} < 0$ et $3^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\times\ln 3} > 0$.
   D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$.
   En définitive :

La fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.



Courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$.

N°49 page 157

Pour tout réel *a* strictement positif, on a (cf. le cours) :

- Si $a \in]0;1[$ alors $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$;
- Si $a > 1$ alors $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

On a :

- $\boxed{0,99 < 1}$;
- $3 < \pi$ alors $\boxed{\frac{\pi}{3} > 1}$;

- $2>1$ alors $\sqrt{2}>1$ et $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}<1}$.

Il vient alors :

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to+\infty} 0,99^x=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=0\end{array}}$$

N°54 page 157

$$f(x)=\frac{3^x-1}{x}$$

1. On a :

$$f(x)=\frac{3^x-1}{x}=\frac{3^x-3^0}{x-0}$$

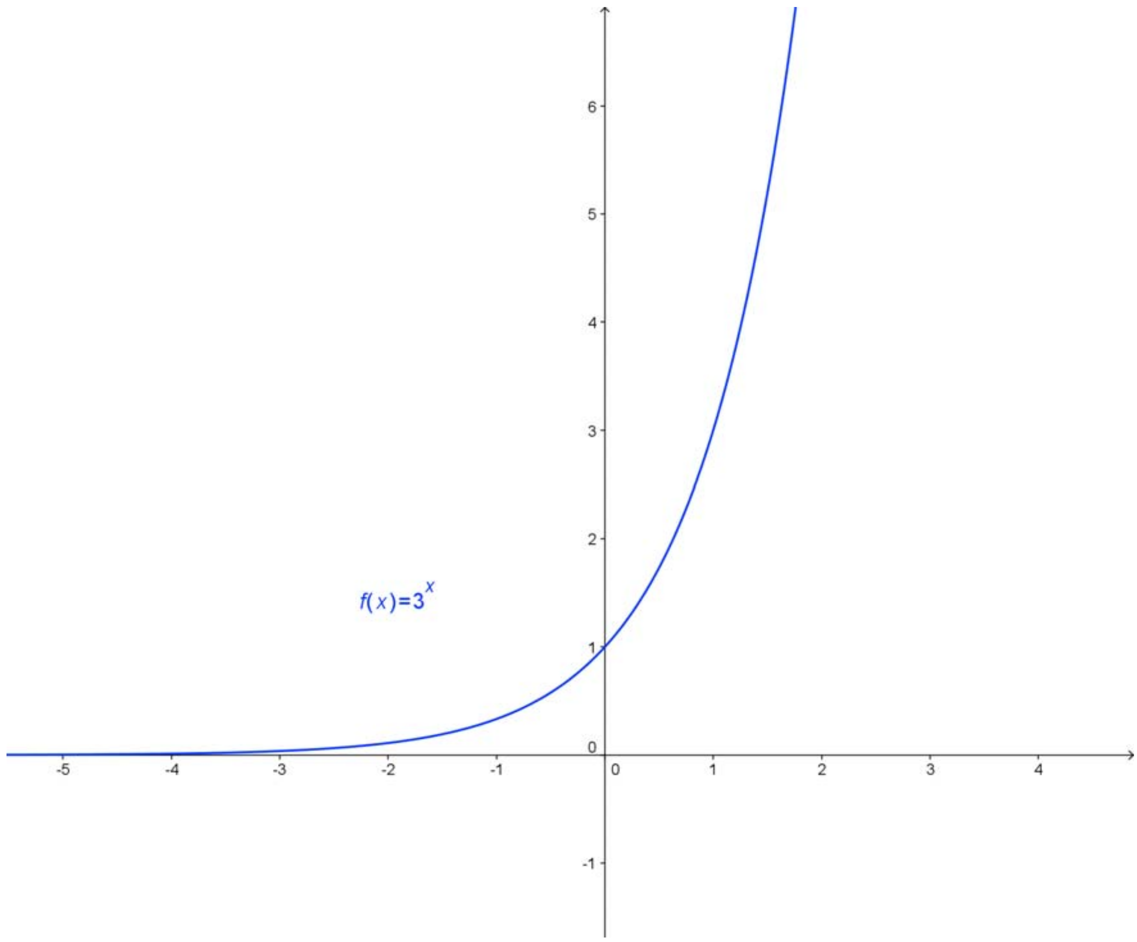
On en déduit :

$$\boxed{f(x) \text{ correspond au taux de variation de la fonction } g : x\mapsto 3^x \text{ entre } 0 \text{ et } x.}$$

2. On déduit de ce qui précède, la fonction *g*, exponentielle de base 3 étant dérivable en 0 :

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{3^x-3^0}{x-0}=g'(0)=\ln 3\times 3^0=\ln 3$$

$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x)=\ln 3}$$



Courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 3^x$.

N°56 page 157

1. a) Pour tout x réel, on a :

$$f(-x) = a^{-x} = e^{-x \times \ln a} = e^{x \times (-\ln a)} = e^{x \times \ln \frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = g(x)$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x)}$$

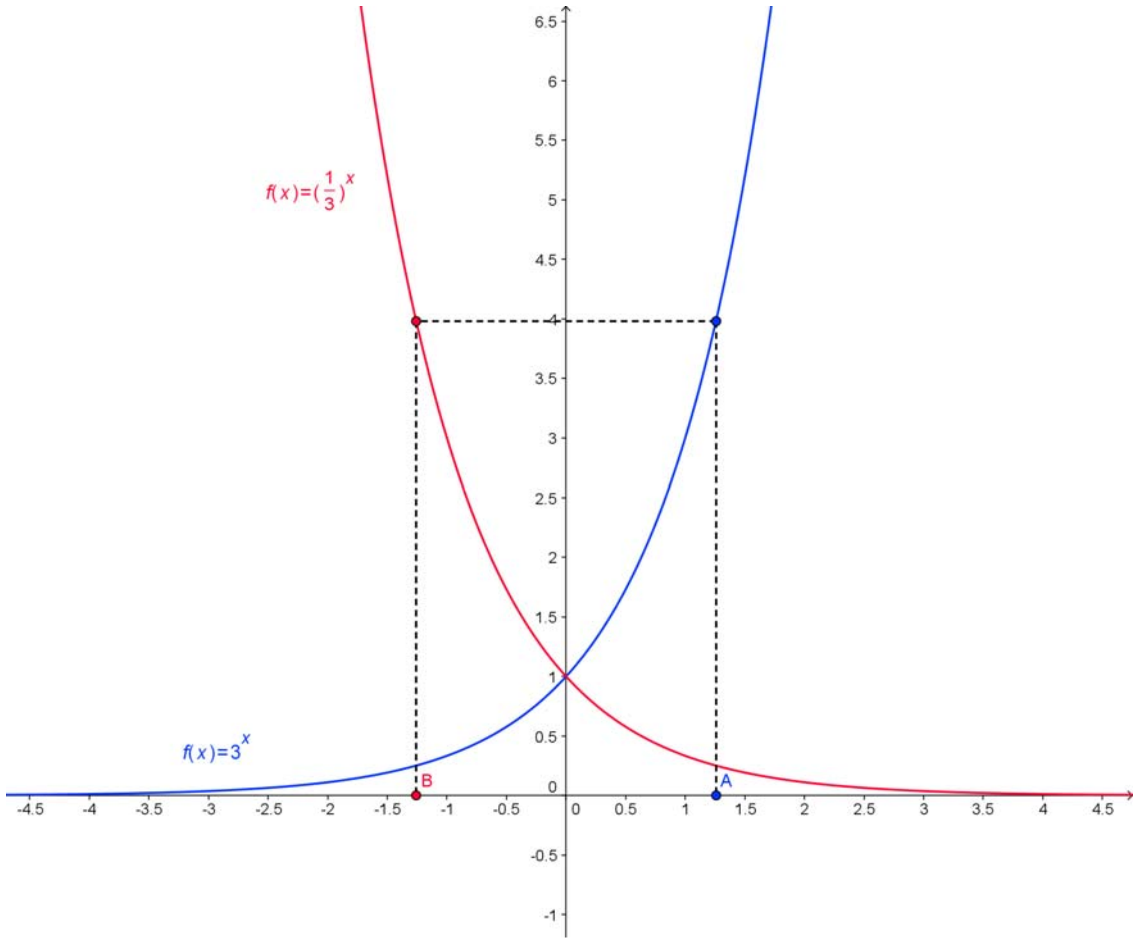
b) Notons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthonormal des fonction f et g respectivement. D'après la question précédente, on a :

$$\mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow y = f(-x) \Leftrightarrow \mathrm{P}(-x;y) \in \mathscr{C}_f$$

On en tire immédiatement que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées :

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2. On a d'abord tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto 3^x$. On a ensuite obtenu $\mathscr{C}_g$ en déterminant la courbe symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées.



N°107 page 162

1. On a :

$$\begin{cases} X-4Y=-3 \\ 3X+5Y=\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ 3X+5Y=\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ 3\left(4Y-3\right)+5Y=\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ 17Y-9=\dfrac{49}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ 17Y=9+\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ 17Y=\dfrac{36+49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ 17Y=\dfrac{85}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4Y-3 \\ Y=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=4\times\dfrac{5}{4}-3 \\ Y=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \\ Y=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

> Le système $\begin{cases} X-4Y=-3 \\ 3X+5Y=\dfrac{49}{4} \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $\left(2;\dfrac{5}{4}\right)$.

2. a) En effectuant le changement de variable $\begin{cases} X=3^x \\ Y=4^y \end{cases}$ et en tenant compte du résultat obtenu à la question précédente, il vient :

$$\begin{cases} 3^x-4^{y+1}=-3 \\ 3^{x+1}+5.4^y=\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x-4.4^y=-3 \\ 3.3^x+5.4^y=\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X-4Y=-3 \\ 3X+5Y=\dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left(X;Y\right)=\left(2;\dfrac{5}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x;4^y\right)=\left(2;\dfrac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=2 \\ 4^y=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \\ y=\dfrac{\ln\dfrac{5}{4}}{\ln 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \\ y=\dfrac{\ln 5-\ln 4}{\ln 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \\ y=\dfrac{\ln 5}{\ln 4}-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(x;y\right)=\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3};\dfrac{\ln 5}{\ln 4}-1\right)$$

> Le système $\begin{cases} 3^x-4^{y+1}=-3 \\ 3^{x+1}+5.4^y=\dfrac{49}{4} \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 3};\dfrac{\ln 5}{\ln 4}-1\right)$.

b) On effectue cette fois le changement de variable $\begin{cases} X = \sqrt[3]{x} \\ Y = \sqrt[3]{y} \end{cases}$. Il vient alors :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ \sqrt[3]{27x} + \sqrt[3]{125y} = \dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{125}\sqrt[3]{y} = \dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{y} = \dfrac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (X;Y) = \left(2;\frac{5}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x};\sqrt[3]{y}\right) = \left(2;\frac{5}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^3 \\ y = \left(\dfrac{5}{4}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \dfrac{125}{64} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x;y) = \left(8;\frac{125}{64}\right)$$

Le système $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{y} = -3 \\ \sqrt[3]{27x} + \sqrt[3]{125y} = \dfrac{49}{4} \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $\left(8;\dfrac{125}{64}\right)$.

N°109 page 162

1. $X = 2^{\frac{3}{2x}}$ donne : $X^2 = \left(2^{\frac{3}{2x}}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2x}\times 2} = 2^{\frac{3}{x}}$ et $X^3 = \left(2^{\frac{3}{2x}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2x}\times 3} = 2^{\frac{9}{2x}}$.

   On en tire alors :

$$2.2^{\frac{9}{2x}} - 3.2^{\frac{3}{x}} - 14.2^{\frac{3}{2x}} + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2^{\frac{3}{2x}} \\ 2X^3 - 3X^2 - 14X + 15 = 0 \end{cases}$$

   On doit donc résoudre :

$$\boxed{2X^3 - 3X^2 - 14X + 15 = 0}$$

2. On pose : $P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 14X + 15$.

   a) On a : $P(1) = 2\times 1^3 - 3\times 1^2 - 14\times 1 + 15 = 2 - 3 - 14 + 15 = 17 - 17 = 0$

$$\boxed{P(1) = 0}$$

b) Puisque 1 est racine du polynôme *P*, on peut factoriser par $X-1$:

$$P(X)=2X^3-3X^2-14X+15=(X-1)\left(aX^2+bX+c\right)$$

En développant l'expression factorisée, on obtient :

$$\begin{aligned}P(X)&=(X-1)\left(aX^2+bX+c\right)\\&=aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c\\&=aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c\end{aligned}$$

On identifie cette expression à $2X^3-3X^2-14X+15$ et on obtient le système :

$$\begin{cases}a=2\\b-a=-3\\c-b=-14\\-c=15\end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases}a=2\\b-a=-3\\c-b=-14\\-c=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=a-3\\c=b-14\\-c=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=2-3\\c=b-14\\-c=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-1-14\\-c=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=-15\end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{P(X)=2X^3-3X^2-14X+15=(X-1)\left(2X^2-X-15\right)}$$

c) On va maintenant résoudre : $2X^2-X-15=0$.

Le discriminant associé s'écrit : $(-1)^2-4\times2\times(-15)=1+120=121=11^2$. D'où les deux racines réelles :

$$X_1=\frac{-(-1)-11}{2\times2}=\frac{1-11}{4}=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}\text{ et }X_2=\frac{-(-1)+11}{2\times2}=\frac{1+11}{4}=\frac{12}{4}=3$$

En définitive :

$$\boxed{\text{Le polynôme } P \text{ admet pour racines : } -\frac{5}{2}\text{, 1 et 3.}}$$

3. Comme on a effectué le changement de variable $X = 2^{\frac{3}{2x}}$, on a : $X > 0$. On ne retient donc pas la racine $-\frac{5}{2}$ et on résout les équations : $2^{\frac{3}{2x}} = 1$ et $2^{\frac{3}{2x}} = 3$.

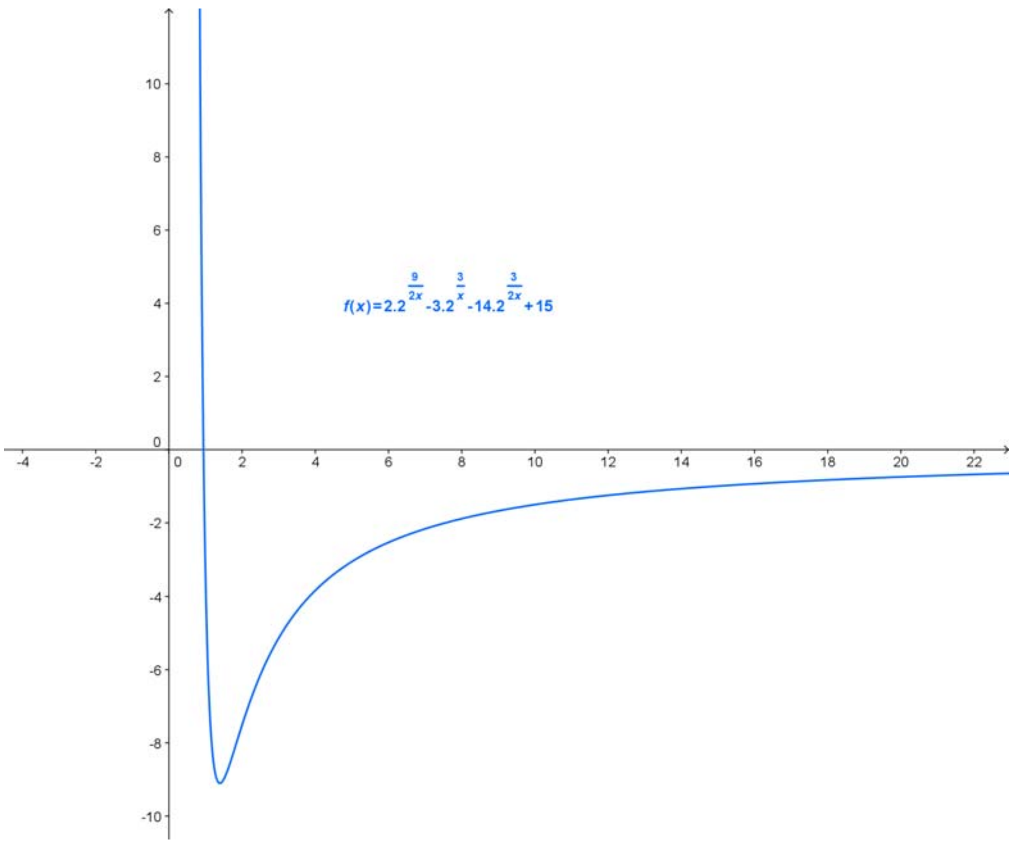
   L'équation $2^t = 1$ admet comme unique solution $t = 0$. On en déduit immédiatement que l'équation $2^{\frac{3}{2x}} = 1$ n'admet pas de solution puisque $\frac{3}{2x}$ ne peut être nul.

   L'équation $2^t = 3$ donne : $t\ln 2 = \ln 3$, soit $t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 0,946$.
   On a donc : $2^{\frac{3}{2x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2x} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2}{2\ln 3}$.

   Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } 2.2^{\frac{9}{2x}} - 3.2^{\frac{3}{x}} - 14.2^{\frac{3}{2x}} + 15 = 0 \text{ admet comme unique solution : } \frac{3\ln 2}{2\ln 3}.}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2.2^{\frac{9}{2x}} - 3.2^{\frac{3}{x}} - 14.2^{\frac{3}{2x}} + 15$.



N°114 page 163

$$f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$$

1. Pour tout réel *x* non nul, on a :

$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}=\frac{1}{5^x}\times\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}\\&=-\frac{5^{2x}}{5^x\left(5^{2x}-1\right)}=-\frac{5^{2x-x}}{5^{2x}-1}=-\frac{5^x}{5^{2x}-1}\\&=-f(x)\end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(-x)=-f(x)}$$

Pour tout réel x non nul, $-x$ appartient au domaine de définition de *f* (les fonctions $x\mapsto 5^x$ et $x\mapsto 5^{2x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et $x=0$ est la seule valeur interdite). Nous avons également l'égalité ci-dessus. On en déduit que la fonction *f* est impaire (l'intitulé de l'exercice se révèle être ainsi d'une originalité torride …). Ainsi, on peut se contenter d'étudier la fonction *f* sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est fondamentalement ce qui est fait ci-dessous …

2. a) On a, en tenant compte des propriétés élémentaires de la fonction exponentielle de base *a* avec $a>1$ (ici $a=5$) :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}5^x=5^0=1 \text{ et } \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(5^x-1\right)=0^+$$

On en déduit alors (rapport) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{5^x}{5^x-1}=+\infty}$$

b) Pour tout réel x strictement positif :

$$f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{1}{\dfrac{5^{2x}-1}{5^x}}=\frac{1}{\dfrac{5^{2x}}{5^x}-\dfrac{1}{5^x}}=\frac{1}{5^x-5^{-x}}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\frac{1}{5^x-5^{-x}}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x=+\infty$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5^x}=0$. On en tire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^x-5^{-x}\right)=+\infty$ et, finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5^x-5^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

3. a) On a, pour tout x réel : $5^x=e^{x\ln 5}$. La dérivée de la fonction $x\mapsto 5^x$ est donc (dérivée d'une composée. Cf. le cours) la fonction : $x\mapsto \ln 5\times 5^x$.
On précède de façon analogue avec la fonction $x\mapsto 5^{2x}$ et on obtient cette fois, comme fonction dérivée , la fonction : $x\mapsto 2\ln 5\times 5^x$.

On dérive alors f en tant que rapport de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\ln 5\times 5^x\times\left(5^{2x}-1\right)-5^x\times 2\ln 5\times 5^{2x}}{\left(5^{2x}-1\right)^2}\\&=\frac{\ln 5\times 5^x\times\left(5^{2x}-1-2\times 5^{2x}\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}\\&=\frac{\ln 5\times 5^x\times\left(-1-5^{2x}\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}\\&=-\frac{\ln 5\times 5^x\times\left(1+5^{2x}\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)=-\frac{\ln 5\times 5^x\times\left(1+5^{2x}\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}}$$

b) Etudions le signe de l'expression précédente.

On a immédiatement, pour tout x réel : $\ln 5 > 0$ et $5^x > 0$. On en tire alors : $1+5^{2x} > 1 > 0$. Le produit $\ln 5 \times 5^x \times \left(1+5^{2x}\right)$ est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$.

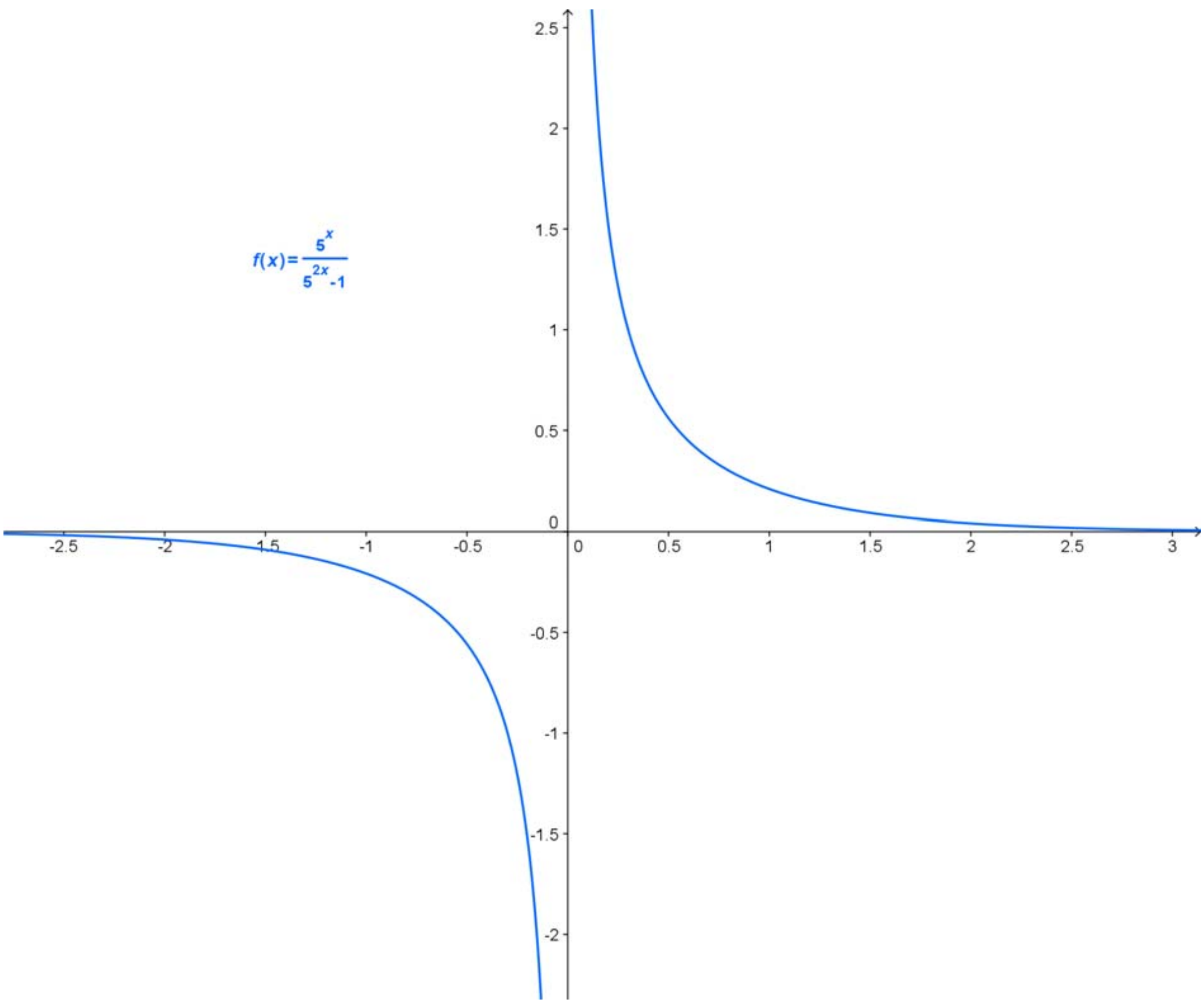
On a par ailleurs : $\left(5^{2x}-1\right)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ car il s'agit d'un carré ne s'annulant pas sur cet ensemble.

On en déduit : $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc, à fortiori, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement :

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On obtient :



Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$.

5. a) On a :

$$\begin{aligned} & f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{2}{3} \\ & \Leftrightarrow 3\times 5^x=2\left(5^{2x}-1\right) \\ & \Leftrightarrow 2\times 5^{2x}-3\times 5^x-2=0 \\ & \Leftrightarrow 2\times\left(5^x\right)^2-3\times 5^x-2=0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} X=5^x \\ 2X^2-3X-2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons alors : $2X^2-3X-2=0$.
Le discriminant associé vaut : $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times(-2)=9+16=25=5^2$.
On obtient alors les deux racines : $\frac{-(-3)-5}{2\times 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ et $\frac{-(-3)+5}{2\times 2}=\frac{8}{4}=2$.
Comme $X=5^x>0$, on ne retient que la seconde racine et on résout : $5^x=2$ qui donne $x\ln 5=\ln 2$ et, finalement : $x=\frac{\ln 2}{\ln 5}$.

L'équation $f(x)=\frac{2}{3}$ admet pour unique solution $x=\frac{\ln 2}{\ln 5}$.

b) En tenant compte du résultat précédent et du fait que la fonction *f* est impaire, on a :

$$f(x)=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow -f(x)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow f(-x)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow -x=\frac{\ln 2}{\ln 5}\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 2}{\ln 5}$$

L'équation $f(x)=-\frac{2}{3}$ admet pour unique solution $x=-\frac{\ln 2}{\ln 5}$.

N°120 page 164

1. Pour tout réel *x* strictement positif, les fonctions *f* et *g* prennent des valeurs strictement positives et on a :

$$g(x)\geq f(x)\Leftrightarrow 3^x\geq x^3\Leftrightarrow \ln\left(3^x\right)\geq \ln\left(x^3\right)\Leftrightarrow x\ln 3\geq 3\ln x\Leftrightarrow x\ln 3-3\ln x\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq 0$$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g(x)\geq f(x)\Leftrightarrow h(x)\geq 0$

2. a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout x strictement positif, on a :

$$h'(x) = 1 \times \ln 3 - \frac{3}{x} = \frac{x\ln 3 - 3}{x}$$

On a alors : $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x\ln 3 - 3}{x} > 0 \Leftrightarrow x\ln 3 - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{\ln 3}$ et $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\ln 3}$.

D'où :

- Pour tout x de l'intervalle $\left]0;\frac{3}{\ln 3}\right[$, $f'(x) < 0$;
- $f'\left(\frac{3}{\ln 3}\right) = 0$;
- Pour tout x de l'intervalle $\left]\frac{3}{\ln 3};+\infty\right[$, $f'(x) > 0$.

En définitive :

La fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0;\frac{3}{\ln 3}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{\ln 3};+\infty\right[$.

b) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln 3 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 3\ln x = -\infty$ d'où (différence) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = +\infty$.

Par ailleurs : $h(x) = x\ln 3 - 3\ln x = x\left(\ln 3 - 3\frac{\ln x}{x}\right)$.

Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 3 - 3\frac{\ln x}{x}\right) = \ln 3 > 0$ et, de fait : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

3. a) D'après la question 2. a), on peut affirmer que la fonction h admet un minimum global pour $x=\frac{3}{\ln 3}$. On a :

$$h\left(\frac{3}{\ln 3}\right)=\frac{3}{\cancel{\ln 3}}\times\cancel{\ln 3}-3\times\ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right)=3\left[1-\ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right)\right]=3\left[\ln e-\ln\left(\frac{3}{\ln 3}\right)\right]=3\ln\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}$$

A la calculatrice, on obtient : $\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}\simeq 0,995<1$.

Ceci dit, sans calculatrice, on peut comparer $\frac{3}{\ln 3}$ et e, plus précisément leurs inverses : $\frac{\ln 3}{3}=\ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$ et $\frac{1}{e}=\ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right)$ … Finalement, on peut étudier la fonction $x\mapsto x^{\frac{1}{x}}$ (serait-ce une vraie suggestion de ma part ? ☺) et découvrir qu'elle admet un maximum pour … $x=e$).

On a donc : $\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}<1$ et donc $\ln\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}<0$.

Finalement, le minimum global de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$ est $h\left(\frac{3}{\ln 3}\right)=3\ln\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}<0$.

On a alors :

$\boxed{\text{Sur l'intervalle } \left]0;\frac{3}{\ln 3}\right[}$

- La fonction h est continue en tant que fonction dérivable ;
- Elle est strictement décroissante (cf. la question 2. a) ;
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x)=+\infty$ et $h\left(\frac{3}{\ln 3}\right)=3\ln\frac{e}{\frac{3}{\ln 3}}<0$ et $0\in\left]h\left(\frac{3}{\ln 3}\right);+\infty\right[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h s'annule exactement une fois sur l'intervalle $\left]0;\frac{3}{\ln 3}\right[$.

$\boxed{\text{Sur l'intervalle } \left]\frac{3}{\ln 3};+\infty\right[}$

- La fonction h est continue en tant que fonction dérivable ;
- Elle est strictement croissante (cf. la question 2. a) ;

- $h\left(\dfrac{3}{\ln 3}\right) = 3\ln\dfrac{e}{\dfrac{3}{\ln 3}} < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ et $0 \in \left]h\left(\dfrac{3}{\ln 3}\right);+\infty\right[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction *h* s'annule exactement une fois sur l'intervalle $\left]\dfrac{3}{\ln 3};+\infty\right[$.

En définitive :

La fonction *h* s'annule deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$

b) La symétrie des deux termes de l'expression de $h(x)$ nous conduit rapidement à la solution (évidente ?) entière : $x = 3$. Comme $\ln 3 > 1$, on a $\dfrac{3}{\ln 3} < 3$ et cette solution appartient donc à l'intervalle $\left]\dfrac{3}{\ln 3};+\infty\right[$. L'autre solution, α, appartient donc à l'intervalle $\left]0;\dfrac{3}{\ln 3}\right[$. Comme $h(1) = \ln 3 > 0$, on peut même affirmer : $\alpha \in \left]1;\dfrac{3}{\ln 3}\right[$.
En tabulant alors avec un pas de 0,1 on obtient :

$$2,4 < \alpha < 2,5$$

Puis, avec un pas de 0,01 :

$$2,47 < \alpha < 2,48$$

Puis, avec un pas de 0,001 :

$$2,478 < \alpha < 2,479$$

A la calculatrice, on obtient : $h(2,4785) < 0$. On a donc : $2,478 < \alpha < 2,4785 < 2,479$ et, finalement :

$\alpha \simeq 2,478$ à 10^{-3}.

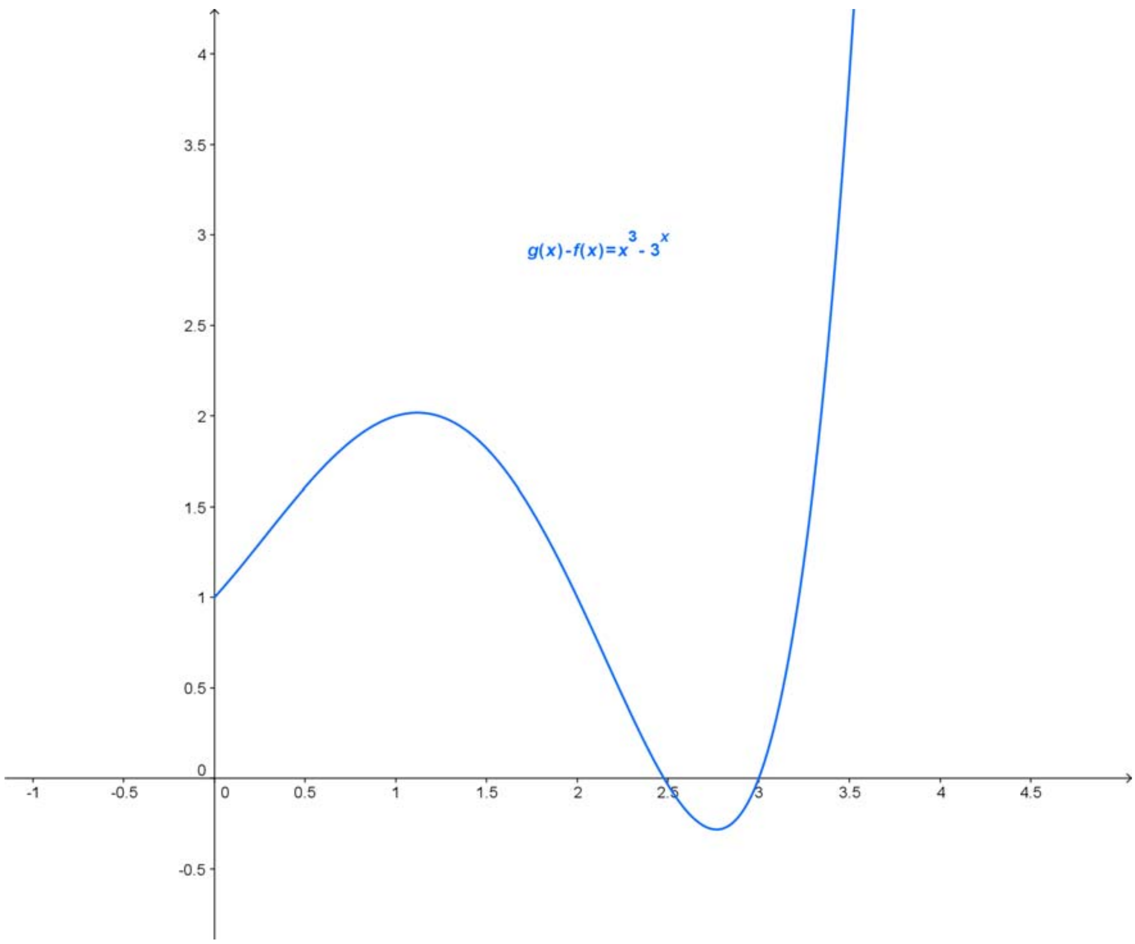
4. a) D'après les questions 2. a) et 3. a), on a immédiatement :

• Pour tout réel *x* de $]0;\alpha[\,\cup\,]3;+\infty[$, $h(x) > 0$;
• Pour tout réel *x* de $]\alpha;3[$, $h(x) < 0$;
• $h(\alpha) = h(3) = 0$.

b) D'après la question précédente et la question 1., on a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]0;\alpha[\cup]3;+\infty[$, $3^x > x^3$;
- Pour tout réel x de $]\alpha;3[$, $3^x < x^3$;
- Pour $x=3$ ou $x=\alpha$, $3^x = x^3$.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous l'allure de la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto 3^x - x^3$:



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto g(x) - f(x) = 3^x - x^3$

N°127 page 165

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \quad (\mathrm{E})$$

a) Les deux membres de l'équation considérée sont strictement positifs et nous pouvons en considérer les logarithmes népériens :

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \Leftrightarrow \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \ln\left[\left(\sqrt{x}\right)^x\right] \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = \frac{1}{2}x\ln x$$
$$\Leftrightarrow \ln x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$$

On a bien :

$$\boxed{(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \ln x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0}$$

b) D'après la question précédente, il convient de résoudre : $\ln x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$.

On a : $\ln x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0$.

On a immédiatement : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. La vérification est immédiate.

Puis, en tenant compte du fait que l'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$:

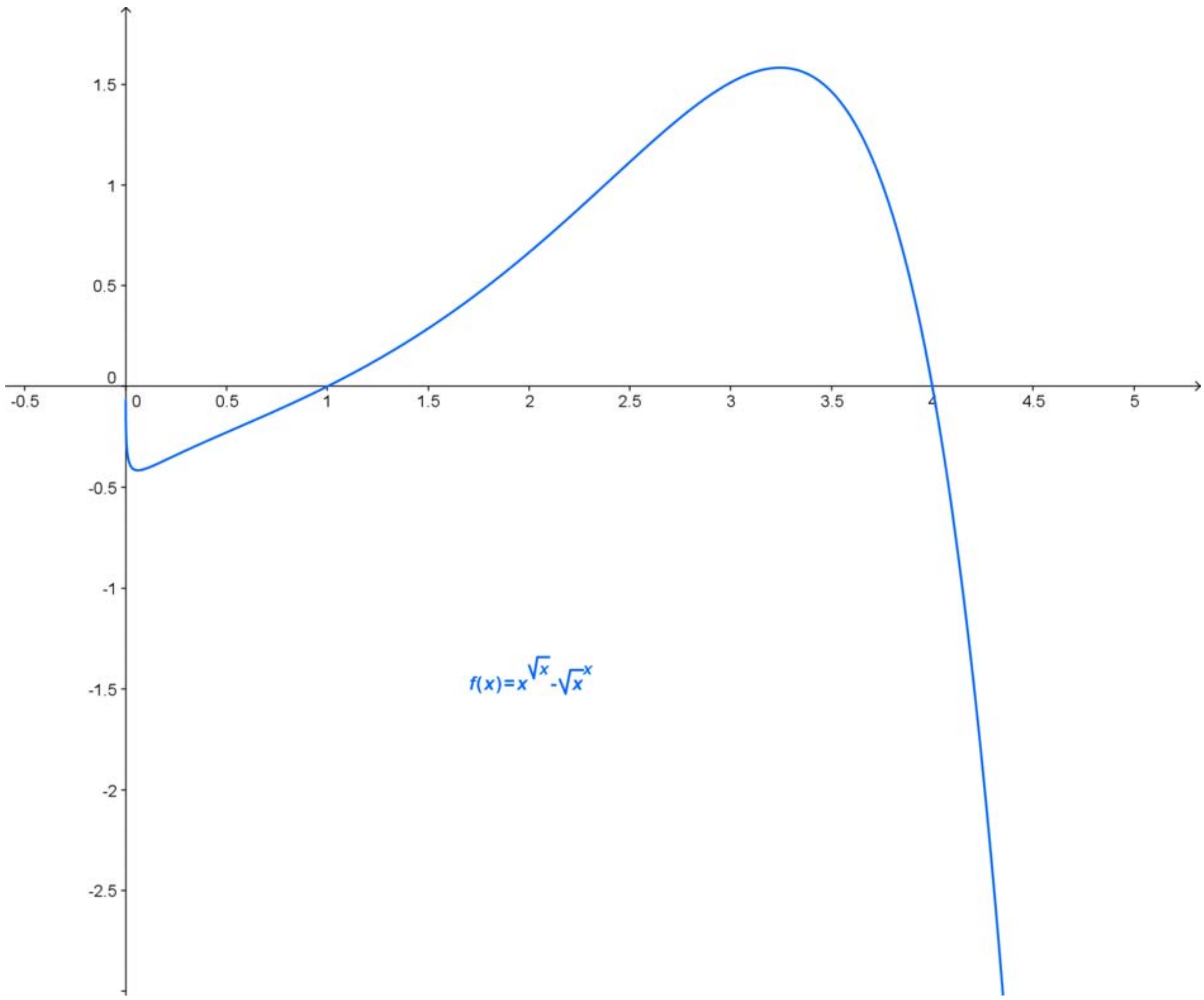
$$\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2}\left(2 - \sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Vérification : $4^{\sqrt{4}} = 4^2 = 16$ et $\sqrt{4}^4 = 2^4 = 16$.

En définitive :

$$\boxed{\text{L'équation } x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \text{ admet deux solutions : 1 et 2.}}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-après l'allure de la courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x}\right)^x$ …



Courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x}\right)^x$