Droites et plans de l'espace.

Corrigés d'exercices

Version du 30/04/2015

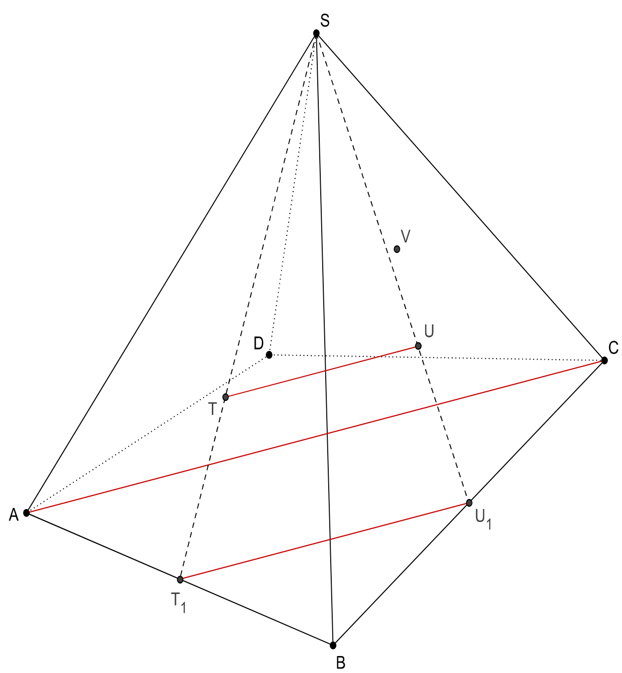
Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

N°3 page 261

La pyramide comporte un total de 5 faces : la base, qui est ici un quadrilatère, et, de fait, 4 faces latérales (ayant pour intersection le point S, sommet de la pyramide).

Pour déterminer l'intersection du plan (TUV) avec la pyramide *SABCD*, il convient donc de déterminer l'intersection de ce plan avec les 5 faces de la pyramide.

Nous suivons l'indication de l'énoncé et commençant par montrer que les droites (TU) et (AC) sont parallèles.



Sur la figure ci-dessus, on a introduit les nouveaux points suivants :

- T_1 milieu du segment $[AB]$.
- U_1 milieu du segment $[BC]$.

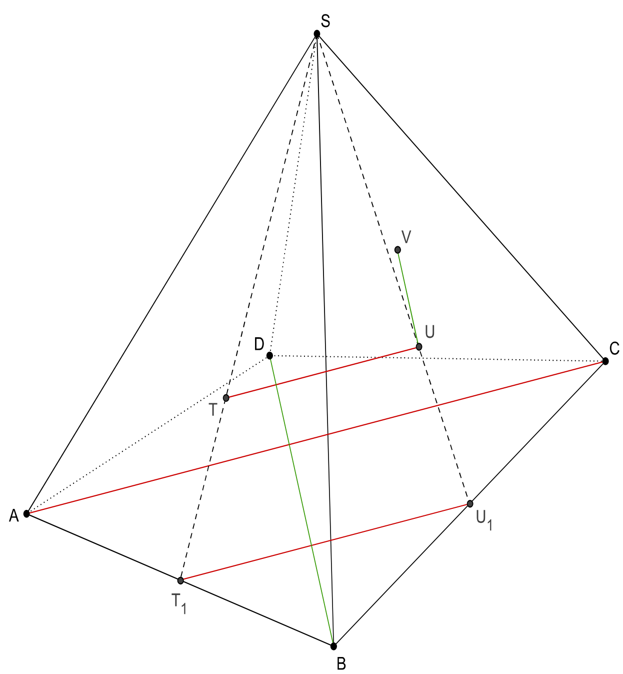
Par définition des points *T* et *U*, les points *S*, *T* et T_1, d'une part, *S*, *U* et U_1, d'autre part, sont alignés. Plus précisément, on a : $\dfrac{ST}{ST_1}=\dfrac{SU}{SU_1}=\dfrac{2}{3}$.

Dans le triangle ST_1U_1, la réciproque du théorème de Thalès nous permet de conclure immédiatement que les droites (TU) et (T_1U_1) sont parallèles.

Dans le triangle *ABC*, les points T_1 et U_1 étant les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[BC]$, la réciproque du théorème de Thalès (dans ce cas particulier, plus classiquement baptisée « théorème des milieux ») nous permet de conclure que les droites (T_1U_1) et (AC) sont parallèles.

De $(TU)//(T_1U_1)$ et $(T_1U_1)//(AC)$, on déduit immédiatement que les droites (TU) et (AC) sont parallèles.

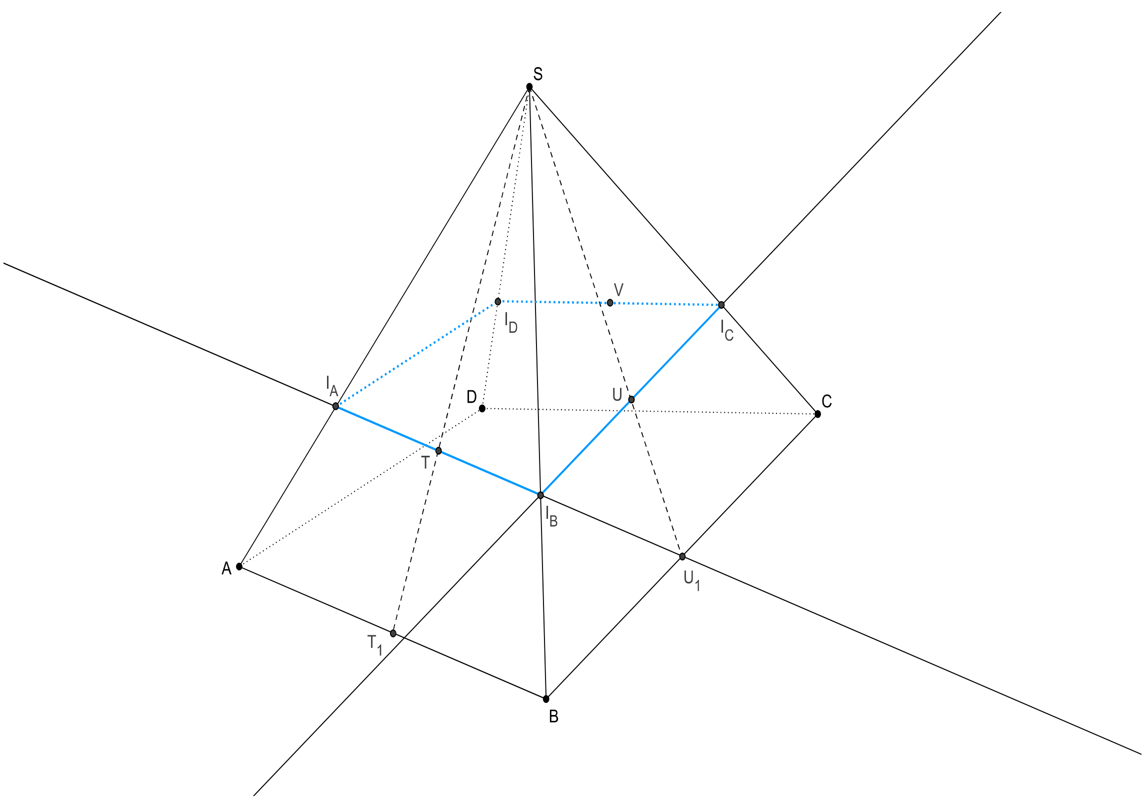
De façon analogue, on montre que l'on a : $(UV)//(BD)$ (voir la figure ci-après).



De $(TU)//(AC)$ et $(UV)//(BD)$, on tire immédiatement que les plan (TUV) et (ABC) sont parallèles : le plan (TUV) est parallèle à la base de la pyramide (le point U n'appartenant pas à cette base, on en conclut, plus précisément, que le plan (TUV) est strictement parallèle au plan (ABC)).
L'intersection du plan (TUV) et de la base de la pyramide est donc vide.

Intéressons-nous maintenant à l'intersection du plan (TUV) et de la face (SAB).

Nous raisonnons avec le plan (SAB).
Le plan (SAB) coupe les plans parallèles (TUV) et (ABC). Les droites d'intersection sont donc elles-mêmes parallèles.
L'intersection du plan (SAB) et du plan (ABC) est la droite (AB).
Quant à l'intersection du plan (SAB) et du plan (TUV), elle contient bien sûr le point T. Il s'agit donc de la parallèle à la droite (AB) passant par le point *T*. Cette droite coupe les droites (SA) et (SB) en I_A et I_B respectivement (voir la figure ci-dessous).
Finalement, l'intersection du plan (TUV) et de la face (SAB) est le segment $[I_A I_B]$.



Dans le triangle SAB, notons que le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{SI_A}{SA} = \frac{ST}{ST_1} = \frac{SI_B}{SB} = \frac{2}{3}$$

De façon analogue, on construit la parallèle à la droite (BC) passant par le point *U*. Cette droite coupe respectivement les droites (SB) et (SC) en I'_B et I_C.
Mais comme le théorème de Thalès, dans le triangle SBC, nous donne cette fois :

$$\frac{SI'_B}{SB} = \frac{SU}{SU_1} = \frac{SI_C}{SC} = \frac{2}{3}$$

De $\frac{SI_B}{SB} = \frac{2}{3} = \frac{SI'_B}{SB}$, on tire que les points I_B et I'_B sont confondus.

On construit enfin la parallèle à la droite (CD) passant par le point *V*. Cette droite coupe respectivement les droites (SC) et (SD) en I_C et I_D.

En définitive, les intersections du plan (TUV) et des quatre faces latérales (SAB), (SBC), (SCD) et (SDA) de la pyramide sont les segments $[I_AI_B]$, $[I_BI_C]$, $[I_CI_D]$ et $[I_DI_A]$.

L'intersection du plan (TUV) et de la pyramide SABCD est le quadrilatère $I_AI_BI_CI_D$.
Grâce au théorème de Thalès, nous pouvons également préciser
qu'il s'agit d'une réduction de facteur $\frac{2}{3}$ de la base ABCD de la pyramide.

Ce résultat est en accord et généralise le premier résultat de l'exercice corrigé de la page 261 : la section d'une pyramide dont la base est un parallélogramme par un plan parallèle à la base et coupant l'une des arêtes des faces latérales de la pyramide est encore un parallélogramme (il s'agit en fait d'une réduction de la base).

N°9 page 267

Rappelons que le point *E* admet $\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ pour coordonnées dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

Pour ce qui est du point *G*, reprécisons un peu les choses.
Le point *G*, centre de gravité du triangle *BCD*, est défini par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

On a donc, classiquement : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
D'où : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ et, finalement : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
On en déduit immédiatement que le point G admet $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ pour coordonnées dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{GE}\left(0-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\right)$, soit $\overrightarrow{GE}\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{3}\right)$.
Finalement :

Une représentation paramétrique de la droite (GE) est :

$$\begin{cases} x=-\dfrac{t}{3} \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{6} \\ z=-\dfrac{t}{3} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Pour montrer que les points K, E et G sont alignés, il suffit de montrer que le point $K(1\,;0\,;1)$ appartient à la droite (GE).
On cherche donc un réel t tel que :

$$\begin{cases} 1=-\dfrac{t}{3} \\ 0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{t}{6} \\ 1=-\dfrac{t}{3} \end{cases}$$

On obtient immédiatement : $t=-3$.

Les points K, E et G sont alignés.

$F\left(\frac{2}{3}\,;0\,;0\right)$ appartient à la droite (GE) si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = -\frac{t}{3} \\ 0 = \frac{1}{2} + \frac{t}{6} \\ 0 = -\frac{t}{3} \end{cases}$$

La première ligne donne $t = -2$ et la troisième $t = 0$. Ce système n'admet donc pas de solution et le point F n'appartient pas à la droite (GE).

On pouvait aussi remarquer, d'après la représentation paramétrique de la droite (GE), que tout point de cette droite admet une abscisse et une cote égales. Comme ce n'est pas le cas pour le point F, on pouvait ainsi conclure sans calcul …

Le point F n'appartient pas à la droite (GE).

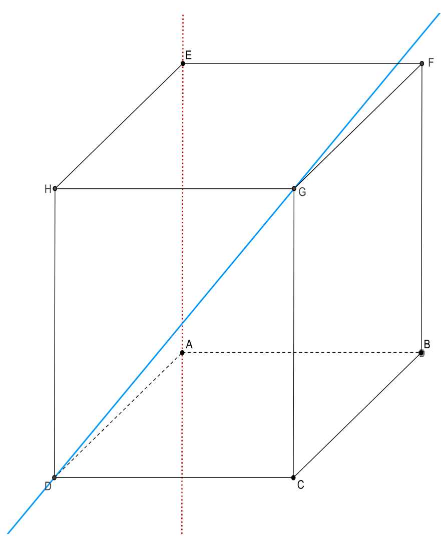
N°23 page 274

Note : ici, on doit bien maitriser le cours de la page 260 et les méthodes de la page 272 !

a. Les droites (DG) et (EA) sont non coplanaires.

En effet, elles appartiennent à deux plans parallèles : respectivement (HGC) et (EAB).

De plus, elles ne sont pas parallèles car les vecteurs $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{EA}$ ne sont pas colinéaires.

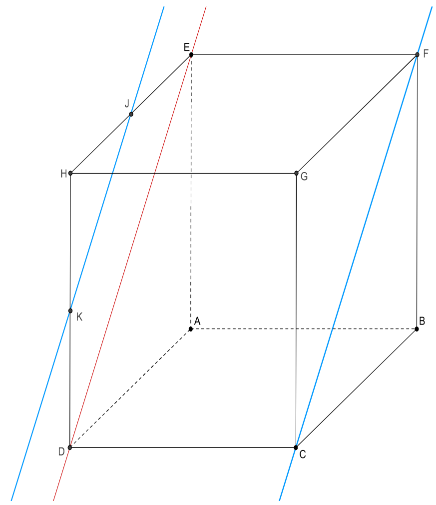


b. Les droites (JK) et (FC) sont parallèles.

En effet, dans le plan (HEA) on montre facilement, grâce au théorème de Thalès (dans sa version « théorème des milieux »), que les droites (JK) et (ED) sont parallèles.

Par ailleurs, les droites (FC) et (ED) sont parallèles comme intersections du plan (EDC) et des plans parallèles (HEA) et (GFB).

Par transitivité du parallélisme, on en déduit que les droites (JK) et (FC) sont parallèles.

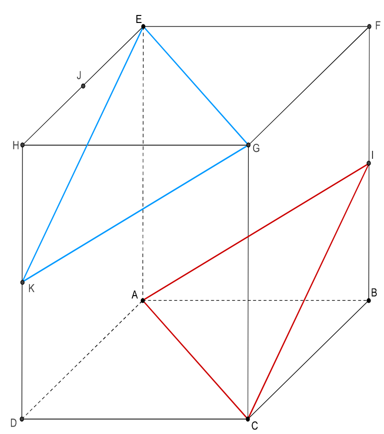


c. La droite (JK) et le plan (EFC) sont parallèles.

Découle directement de la question précédente : la droite (JK) étant parallèle à la droite (FC), elle est parallèle à tout plan contenant la droite (FC), notamment au plan (EFC).

d. Les plans (EKG) et (AIC) sont parallèles.

Ici, on va utiliser le fait que si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{Q}$ alors ces deux plans sont parallèles.

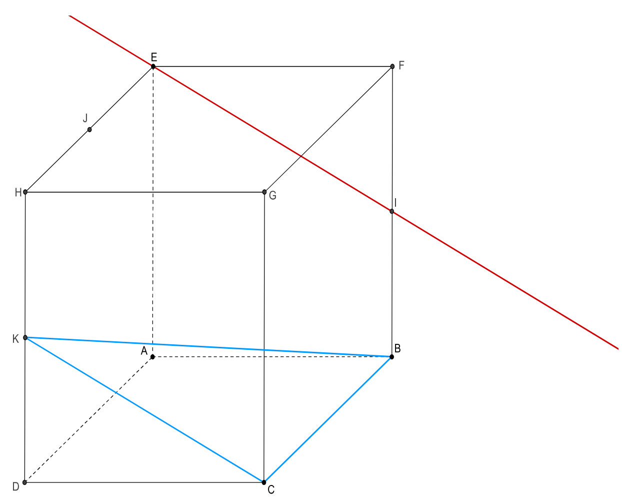


Les droites (EG) et (AC) sont parallèles comme intersections des plans parallèles (EFG) et (ABC) et du plan (AEG).

Par ailleurs, le quadrilatère *AIGK* est un losange (il s'agit, plus précisément d'un carré mais nous nous en fichons ici ! ☺) puisque les quatre longueurs *AI*, *IJ*, *GK* et *KA* sont égales (du théorème de Pythagore en veux-tu en voilà !). Il s'agit donc d'un parallélogramme et on en déduit que les droites (AI) et (GK) sont parallèles.

Finalement, les droites sécantes (EG) et (GK) sont parallèles aux droites sécantes (AC) et (AI). D'où le résultat.

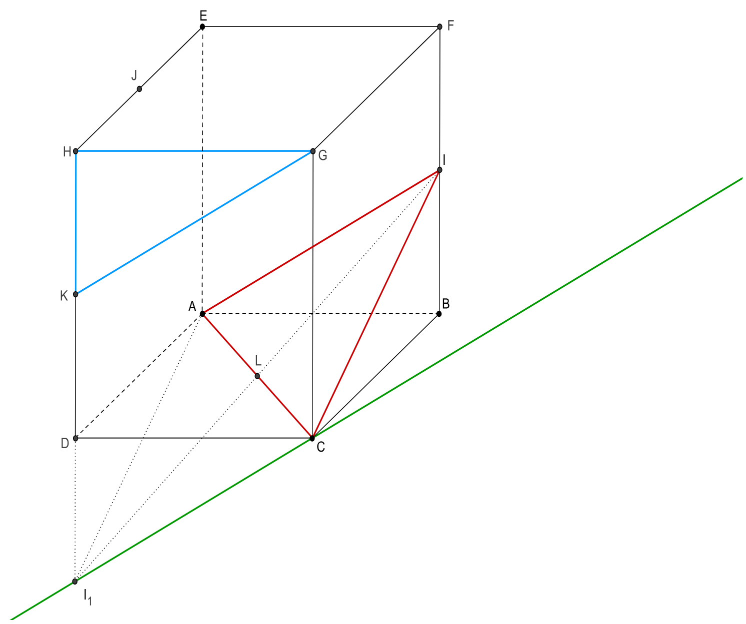
e. La droite (EI) est parallèle au plan (BCK).
En effet, en considérant, de façon similaire à ce qui a été fait ci-dessus, le quadrilatère *EICK*, on montre facilement qu'il s'agit d'un losange. Ainsi, les droites (EI) et (CK) sont parallèles. Il en va donc de même de la droite (EI) et du plan (BCK) puisque celui-ci contient la droite (CK).



f. Les plans (GHK) et (AIC) sont sécants.
Notons, dans un premier temps, que le plan (GHK) est le support de la face avant *CDHG* du cube. Le point C est donc un point commun aux deux plans (GHK) et (AIC).

Ensuite, on considère le milieu *L* du segment $[AC]$.
Les points *B* et *D* sont symétriques l'un de l'autre par rapport à *L*.

Il en va de même des droites (BF) et (DH) puisqu'elles contiennent respectivement les points B et D et sont parallèles.

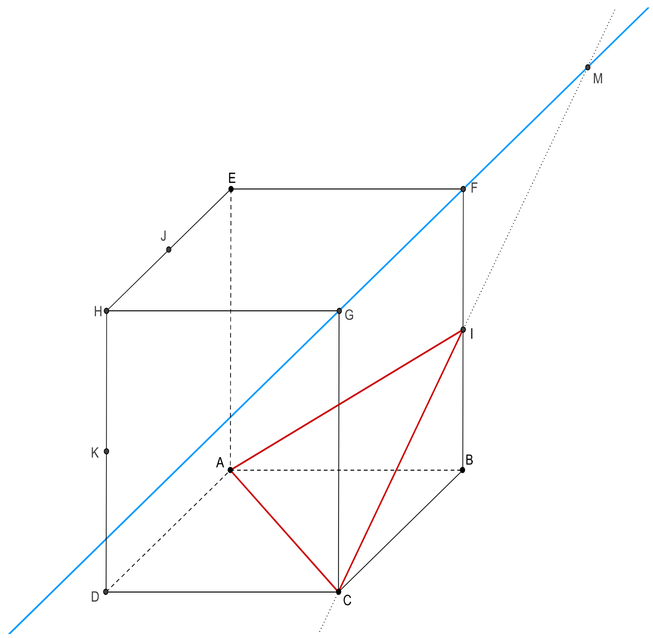


On considère alors le point I_1, symétrique de I par rapport à L.
D'après ce qui précède, le point I_1 appartient à la droite (DH) et donc au plan (GHK).
Mais ce point appartient également au plan (AIC) puisqu'il s'agit d'un point de la droite (IL) de ce plan.

Les plans (GHK) et (AIC) n'étant pas confondus (le point I n'appartient pas à la face avant du cube mais à l'une des arêtes de la face arrière), leur intersection est la droite (CI_1).

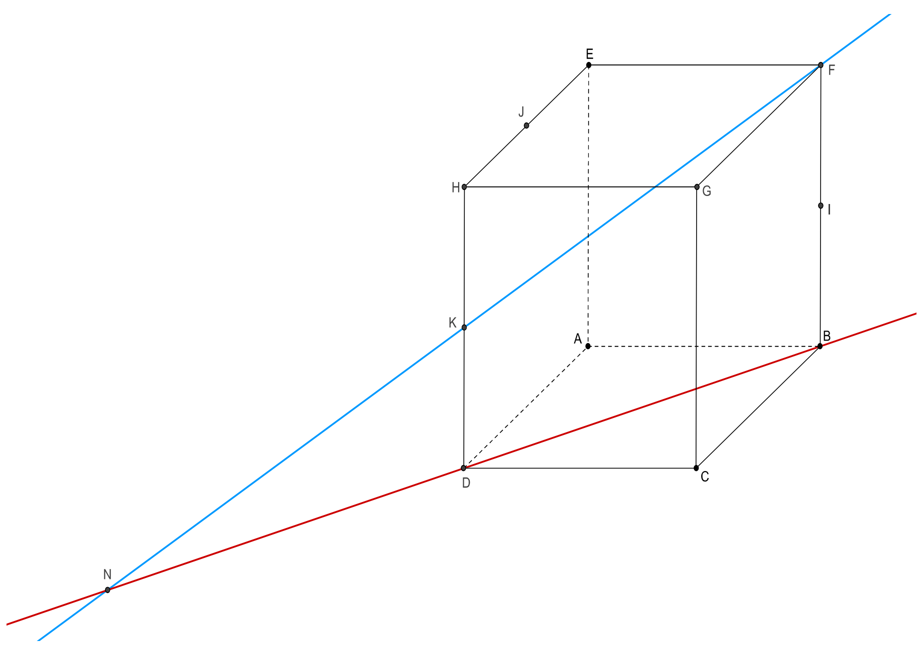
g. Le plan (AIC) et la droite (FG) sont sécants.
On remarque d'abord que les droites (IC) et (FG) appartiennent toutes deux au plan (BFG) et qu'elles sont sécantes (cf. les vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{IC}$ qui ne sont pas colinéaires). On note M leur point d'intersection (cf. la figure ci-après).

Comme le point F n'appartient pas au plan (AIC), on en déduit immédiatement que la droite (FG) et le plan (AIC) sont sécants en M.



h. Les droites (FK) et (BD) sont sécantes.

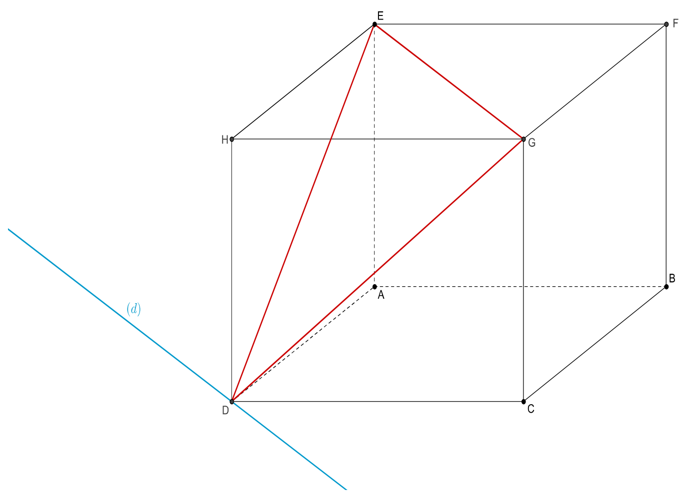
Elles appartiennent toutes deux au plan (FHD) et ne sont pas parallèles (considérer, par exemple, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{BD}$).



N°28 page 275

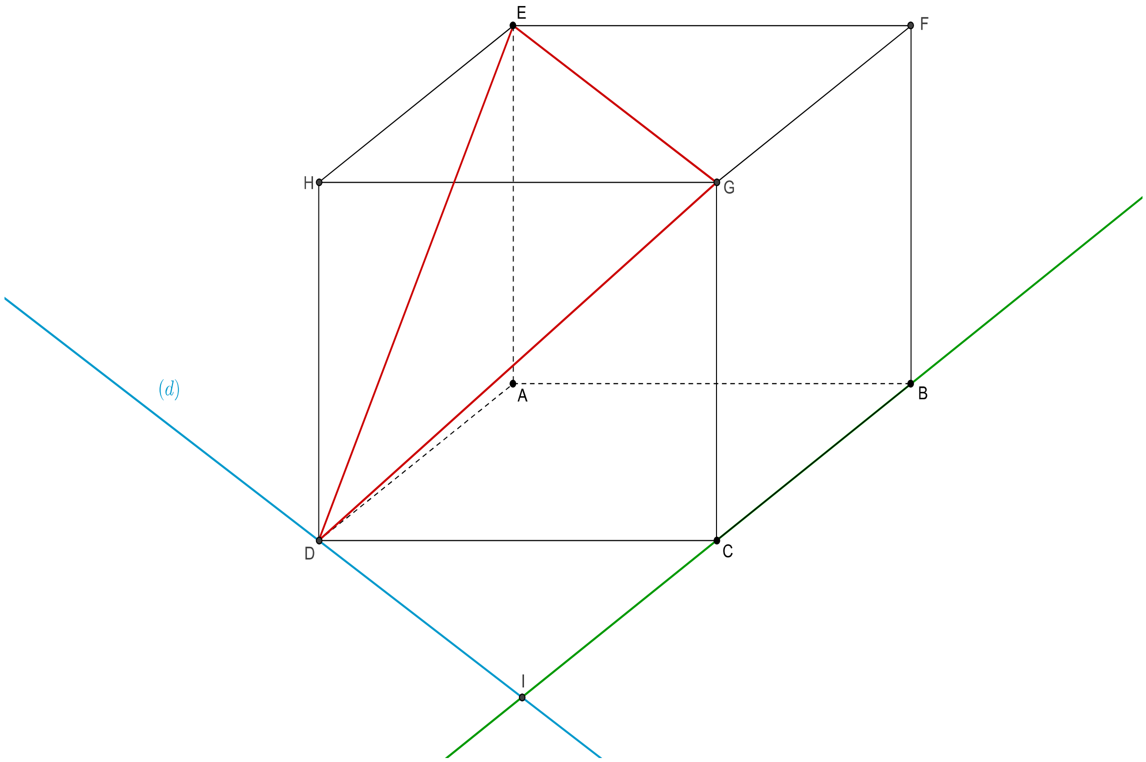
1. Le plan (EDG) coupe les plans parallèles (ABC) et (EFG) selon deux droites elles aussi parallèles. La première est la droite (EG). La seconde passe par le point D (celui-ci appartenant aux plans (EDG) et (ABC)).
   On en déduit ainsi :

> L'intersection des plans (EDG) et (ABC)
> est la droite (d) parallèle à la droite (EG) et passant par le point D.



2. Les droites (d) et (BC) sont deux droites du plan (ABC). Elles ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ qui ne sont pas colinéaires. Ces deux droites sont donc sécantes et nous notons I leur point d'intersection.
   La droite (d) étant une droite du plan (EDG), on en déduit finalement que :

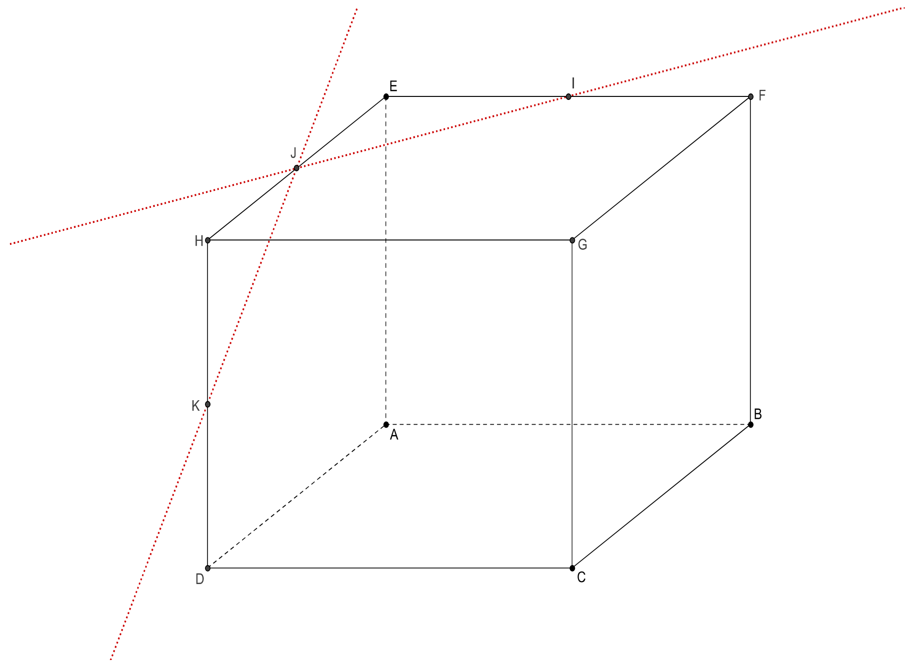
> L'intersection de la droite (BC) et du plan (EDG)
> est le point I, intersection des droites (d) et (BC).



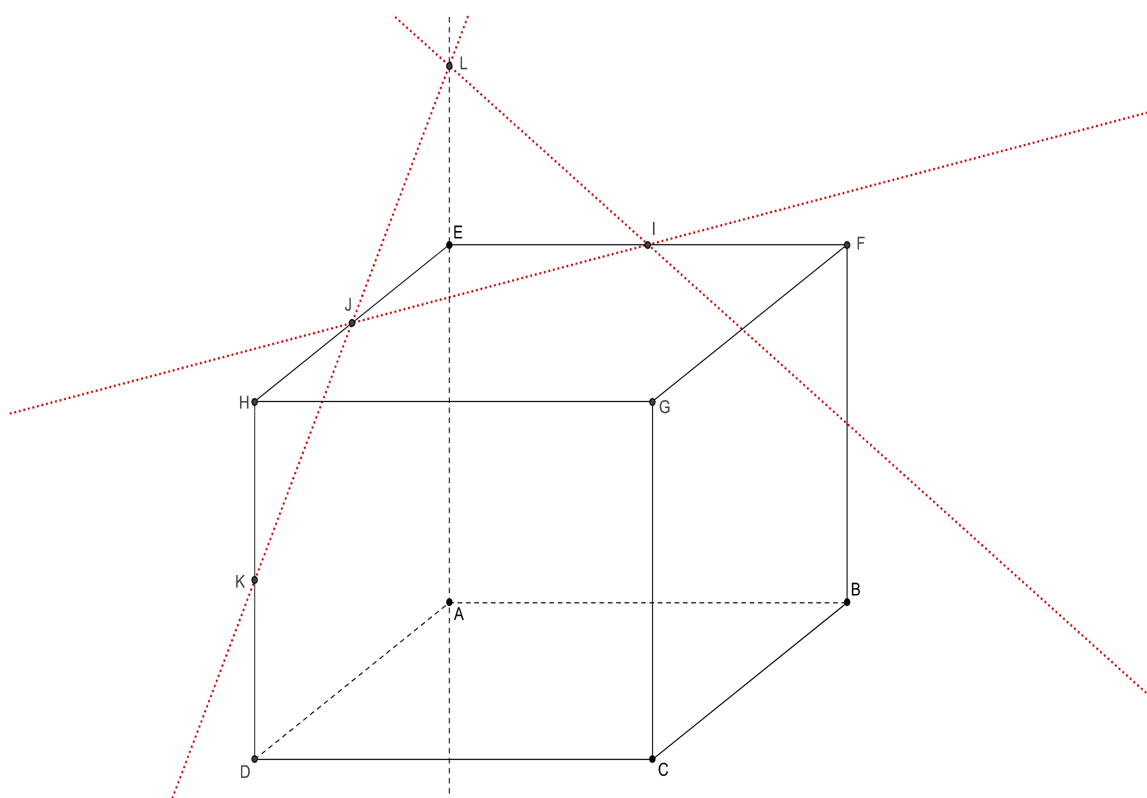
N°29 page 275

1. Les points I et J sont deux points du plan $\left(EFG\right)$ et le point K n'appartient pas à ce plan. L'intersection du plan $\left(IJK\right)$ et du plan $\left(EFG\right)$ est donc la droite $\left(IJ\right)$.

   De façon analogue, on établit que l'intersection des plans $\left(IJK\right)$ et $\left(AED\right)$ est la droite $\left(JK\right)$.



2. Le point L appartient à la droite (JK) et donc au plan (IJK).
   Le point L appartient à la droite (AE) et donc au plan (AEB).
   Ainsi, le point L appartient à l'intersection des plans (IJK) et (AEB).



Le point I appartient évidemment au plan (IJK).
Le point I étant le milieu du segment $[EF]$, il s'agit d'un point de la droite (EF), elle-même incluse dans le plan (AEB). Ainsi, le point I est un point du plan (AEB).

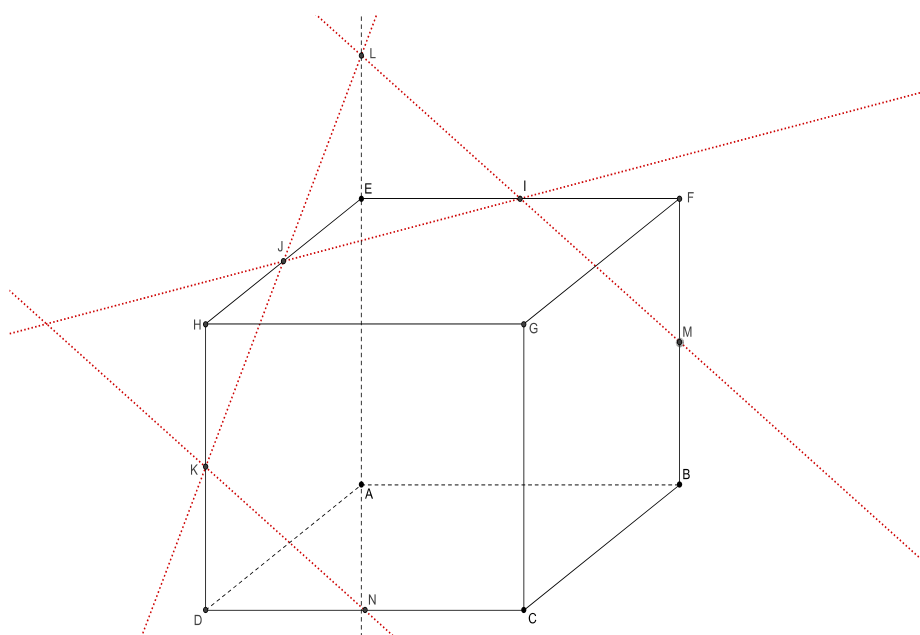
Les points I et L appartiennent tous deux aux plans (IJK) et (AEB).
Finalement, les plans (IJK) et (AEB) n'étant pas confondus (le point K n'appartient pas au plan (AEB)), leur intersection est la droite (IL).

La droite (IL) est la droite d'intersection des plans (IJK) et (AEB).

3. Les plans (CDG) et (AEB) sont parallèles (support de deux faces opposées d'un cube).
   Le plan (IJK) coupe ces deux plans selon deux droites parallèles.
   Comme la droite (IL) est la droite d'intersection des plans (IJK) et (AEB), on en déduit que la droite d'intersection des plans (IJK) et (CDG) est parallèle à la droite (IL).

La droite d'intersection des plans (IJK) et (CDG) est une droite parallèle à la droite (IL)

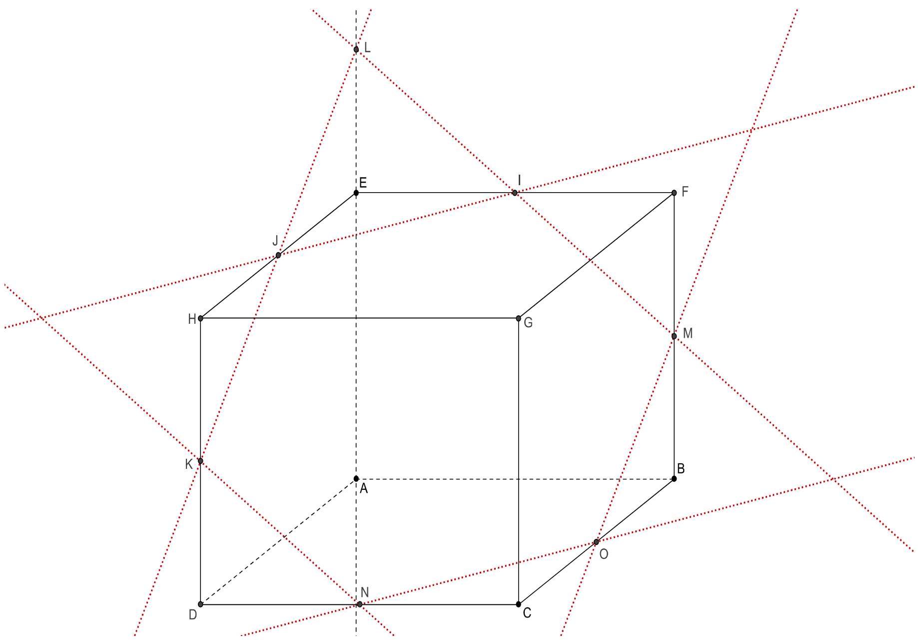
4. Nous notons N le point d'intersection de la droite précédente et de la droite (CD) (qui est incluse dans le plan (CDG)) et M le point d'intersection de la droite (IL) et de la droite (FB) (qui est incluse dans le plan (AEB)).



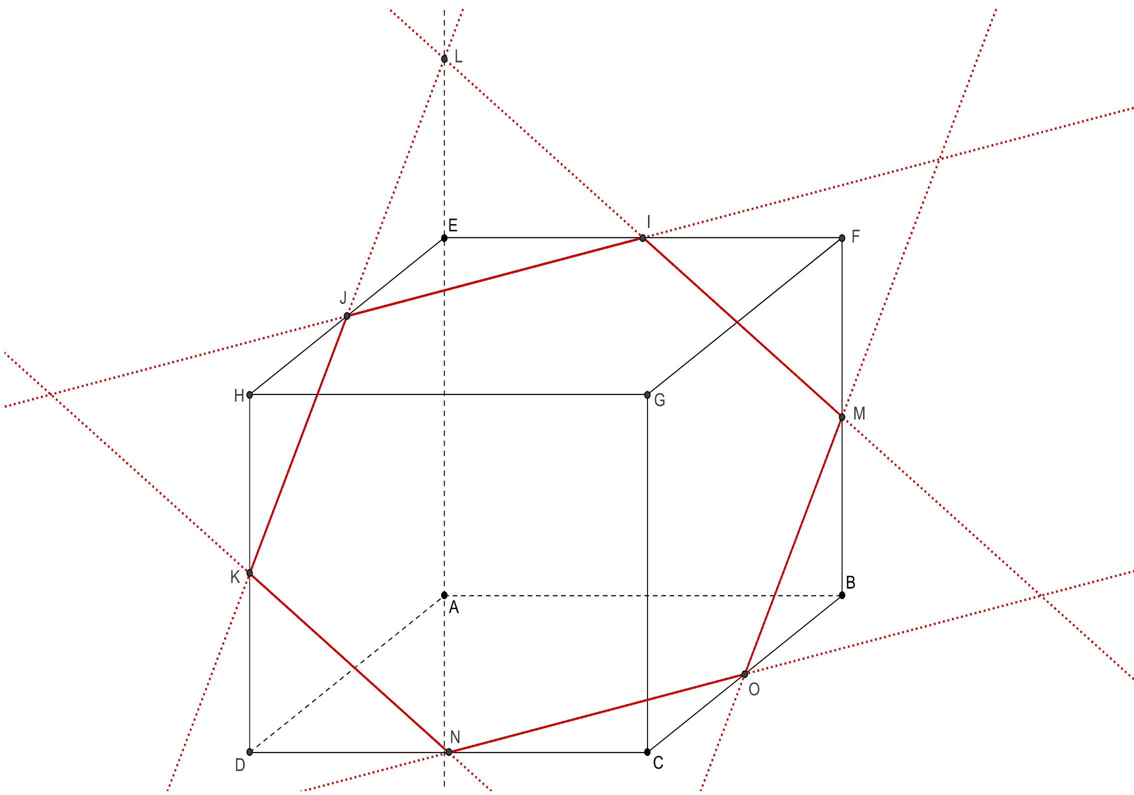
Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (EFG) et (ABC) suivant deux droites elles-mêmes parallèles. Comme la droite (IJ) est l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG), on en déduit que l'intersection du plan (IJK) et du plan (ABC) est la parallèle à la droite (IJ) passant par le point N.

De façon similaire, on établit que l'intersection du plan (IJK) et du plan (GFB) est la parallèle à la droite (JK) passant par le point M.

Si l'on a bien travaillé (i.e. effectué une construction soignée) on constate que les deux droites précédentes se coupent en un point O du segment $[BC]$ (cf . la figure ci-dessous).



L'intersection du plan (IJK) et du cube $ABCDEFGH$ est, finalement, l'hexagone (régulier en l'occurrence) $IJKNOM$ (voir figure ci-après).



N°37 page 276

1. On a facilement $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GF}$ et, de fait : $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GF}=\boxed{\overrightarrow{AF}}$

   Comme $\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{G'F}$, on a : $\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{AG'}+\overrightarrow{G'F}=\boxed{\overrightarrow{AF}}$

   Comme $\overrightarrow{F'E}=\overrightarrow{H'G}$, on a : $\overrightarrow{BH'}+\overrightarrow{F'E}=\overrightarrow{BH'}+\overrightarrow{H'G}=\boxed{\overrightarrow{BG}}$

   Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$, on a $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ puis $2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\boxed{\overrightarrow{AH}}$

   On a : $-3\overrightarrow{FG}=3\overrightarrow{GF}$. Par ailleurs : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{CD}$. Ainsi : $3\overrightarrow{GF}=3\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.
   Finalement : $-3\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DF'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF'}=\boxed{\overrightarrow{AF'}}$

   Comme $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$, il vient immédiatement $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CB}$.
   Alors : $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B'B}$. Mais $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{C'B'}$.
   Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{B'B}=\boxed{\overrightarrow{C'B}}$

2. Le point I est le point d'intersection des droites (AE) et (BG).

   On peut, bien sûr, utiliser le théorème de Thalès (nous vous laissons le soin de détailler cette première approche). Nous pouvons également adopter une approche plus vectorielle …

   Les points A, I et E étant alignés, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AE}$. On a alors :

$$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AE} = k\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) = k\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right)$$

   Or : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$.
   On a donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = k\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right)$, soit : $(1-3k)\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IB}$.

   Mais comme les droites (BG) et (DE) sont parallèles et comme le point I appartient à la droite (BG), les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires. Comme ils sont non nuls, il existe un réel k' tel que $\overrightarrow{IB} = k'\overrightarrow{DE}$. On a donc :

$$(1-3k)\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow (1-3k)\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DE} + k'\overrightarrow{DE} = (k+k')\overrightarrow{DE}$$

   Mais comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires, on a :

$$(1-3k)\overrightarrow{AB} = (k+k')\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3k = 0 \\ k+k' = 0 \end{cases}$$

   On en tire immédiatement : $k = -k' = \dfrac{1}{3}$.

   On a donc : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Le résultat est établi.

$$\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}}$$

3. Les droites (AE) et (AE') sont sécantes en A. Nous pouvons considérer le plan (AEE'). Il coupe le plan $(BB'G')$ selon la droite (IJ) et, bien sûr, le plan $(DD'E')$ selon la droite (EE'). On en tire que ces deux droites sont parallèles.
   On peut alors simplement utiliser le théorème de Thalès dans le triangle AEE' pour établir le résultat demandé.

$$\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE'}}$$

N°39 page 276

1. Comme $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DH}$, il vient : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}$.
   On en déduit immédiatement que <u>les points *I* et *H* sont confondus</u>.

   Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{GB}$, il vient : $\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{HB}$.
   On en déduit immédiatement que <u>les points *J* et *B* sont confondus</u>.

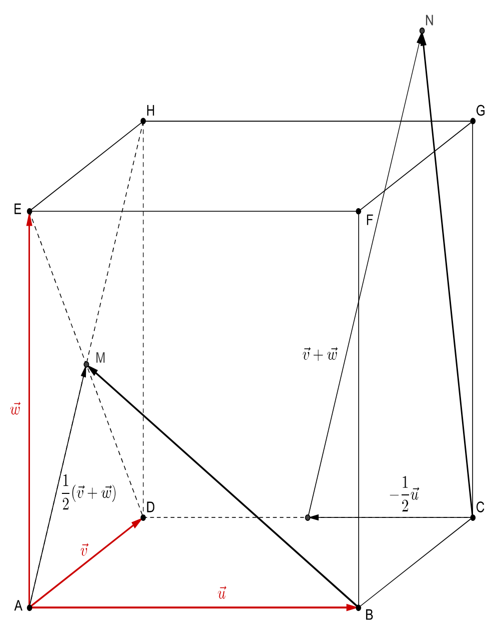
   On a : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HD}$.
   Comme $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{GC}$, il vient : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.
   On en déduit immédiatement que <u>les points K et C sont confondus</u>.

2. On a :

$$\overrightarrow{BM}=-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)}_{=\overrightarrow{AI}\text{ d'après la question 1.}}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$$

   Enfin, on a : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
   Le point *M* est donc le milieu du segment $[AH]$, c'est-à-dire le centre de la face *AEHD*.

   Pour construire le point *N*, on « part » du point *C* et on effectue la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$. On obtient comme point intermédiaire le milieu du segment $[DC]$.
   On effectue alors la translation de vecteur $\vec{v}+\vec{w}$.



3. On a : $\overrightarrow{BM} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$ et $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CN} + x\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + x\vec{u} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

   D'après les coefficients de $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on aura $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CP}$ colinéaires si, et seulement si : $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{BM}$. On aura alors : $x - \frac{1}{2} = 2\times(-1)$, soit $x = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires si, et seulement si : $x = -\frac{3}{2}$.

N°43 page 277

1. Sur le point *F*, nous disposons de deux informations fondamentales :
   - D'une part, il appartient à la droite (AG).
   - D'autre part, il appartient au plan (BCD).

   La question posée ici découle de la deuxième information mais ne fait explicitement apparaître aucun lien direct avec la première.

   A partir de ce constat, nous allons appréhender la situation différemment en considérant comme <u>repère de l'espace</u> : $\left(B\,;\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$. Notre objectif va alors être de traduire les deux informations ci-dessus dans ce repère.

   On a immédiatement $A(1\,;0\,;0)$ et comme $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (le point *E* est le milieu du segment $[AB]$), il vient : $E\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$.

   Par définition du point *G*, on a : $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
   Pour obtenir les coordonnées du point *G*, nous devons nous intéresser au vecteur $\overrightarrow{BG}$. On écrit donc :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{BG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}
\end{aligned}$$

   Ainsi : $G\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

Comme le point F appartient au plan (BCD), nous pouvons poser : $F(0\,;x\,;y)$.

On a alors : $\overrightarrow{AG}\left(\frac{1}{6}-1\,;\frac{1}{3}-0\,;\frac{1}{3}-0\right)$, soit : $\overrightarrow{AG}\left(-\frac{5}{6}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.
Puis : $\overrightarrow{AF}(0-1\,;x-0\,;y-0)$, soit $\overrightarrow{AF}(-1\,;x\,;y)$.

Les points A, G et F sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires c'est-à-dire si leurs coordonnées sont proportionnelles. En raisonnant sur les abscisses de ces deux vecteurs, il vient immédiatement : $\overrightarrow{AF}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AG}$.

On en tire alors : $x=y=\frac{6}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$.

On a finalement : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$.

Les coordonnées du point F dans le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$ valent : $\left(\frac{2}{5}\,;\frac{2}{5}\right)$.

2. Puisque le point J est le milieu du segment $[CD]$, on a : $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BJ}$.
   Il vient alors :

$$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{2}{5}\times2\overrightarrow{BJ}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BJ}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BJ}$ étant colinéaires, on en déduit immédiatement :

Les points B, F et J sont alignés.

N°64 page 279

- $\overrightarrow{MN}(0-2\,;3-(-4)\,;5-1)$ soit $\boxed{\overrightarrow{MN}(-2\,;7\,;4)}$.
- $\overrightarrow{NP}(-1-0\,;2-3\,;0-5)$ soit $\boxed{\overrightarrow{NP}(-1\,;-1\,;-5)}$.
- $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}\left(2\times(-2)+3\times(-1)\,;2\times7+3\times(-1)\,;2\times4+3\times(-5)\right)$ soit $\boxed{2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}(-7\,;11\,;-7)}$.
- On a d'abord : $-3\overrightarrow{MP}+4\overrightarrow{PN}=-3\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\right)-4\overrightarrow{NP}=-3\overrightarrow{MN}-7\overrightarrow{NP}$. Il vient alors :
  $-3\overrightarrow{MN}-7\overrightarrow{NP}\left((-3)\times(-2)+(-7)\times(-1)\,;(-3)\times7+(-7)\times(-1)\,;(-3)\times4+(-7)\times(-5)\right)$
  Soit : $\boxed{-3\overrightarrow{MN}-7\overrightarrow{NP}(13\,;-14\,;23)}$.

N°65 page 279

On a facilement : $\overrightarrow{AB}\left(-2-1\,;3-2\,;6-4\right)$, soit $\overrightarrow{AB}\left(-3\,;1\,;2\right)$, et
$\overrightarrow{CD}\left(-6-\left(-3\right);-1-\left(-2\right);4-2\right)$, soit $\overrightarrow{CD}\left(-3\,;1\,;2\right)$.
Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, on en déduit finalement :

ABDC est un parallélogramme.

N°67 page 279

1. Le point *I* est le milieu du segment [*BD*]. On a donc : $I\left(\dfrac{-1+\left(-2\right)}{2}\,;\dfrac{2+3}{2}\,;\dfrac{4+2}{2}\right)$ soit :

$$\boxed{I\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\,;3\right)}$$

Le point *J* est le milieu du segment [*AC*]. On a donc : $J\left(\dfrac{2+3}{2}\,;\dfrac{-5+4}{2}\,;\dfrac{1+\left(-1\right)}{2}\right)$ soit :

$$\boxed{J\left(\frac{5}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;0\right)}$$

Le point *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*. On a donc :

$$G\left(\frac{2+\left(-1\right)+3}{3}\,;\frac{-5+2+4}{3}\,;\frac{1+4+\left(-1\right)}{3}\right)\text{ soit }\boxed{G\left(\frac{4}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{4}{3}\right)}$$

Le point K est défini par la relation : $\overrightarrow{DK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DG}$.

Posons alors : $K\left(x_K\,;y_K\,;z_K\right)$.

On a : $\overrightarrow{DK}\left(x_K-\left(-2\right);y_K-3\,;z_K-2\right)$, soit $\overrightarrow{DK}\left(x_K+2\,;y_K-3\,;z_K-2\right)$.

Et : $\overrightarrow{DG}\left(\dfrac{4}{3}-\left(-2\right);\dfrac{1}{3}-3\,;\dfrac{4}{3}-2\right)$, soit : $\overrightarrow{DG}\left(\dfrac{10}{3}\,;-\dfrac{8}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\right)$.

On a alors : $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DG}\left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{10}{3}\,;\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{8}{3}\right);\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right)$, soit : $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DG}\left(\dfrac{5}{2}\,;-2\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Il vient alors : $\overrightarrow{DK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K+2=\frac{5}{2}\\ y_K-3=-2\\ z_K-2=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=\frac{1}{2}\\ y_K=1\\ z_K=\frac{3}{2}\end{cases}$.

$$\boxed{K\left(\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right)}$$

2. A l'aide des résultats obtenus à la première question, on obtient facilement :

$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right);-\frac{1}{2}-\frac{5}{2};0-3\right)$, soit $\overrightarrow{IJ}(4;-3;-3)$.
$\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right);1-\frac{5}{2};\frac{3}{2}-3\right)$, soit $\overrightarrow{IK}\left(2;-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.
On a immédiatement : $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ et on en déduit :

Le point K est le milieu du segment $[IJ]$.

N°71 page 280

1. On a facilement :

$$\overrightarrow{AB}(2-(-4);3-1;-1-5)\text{, soit }\overrightarrow{AB}(6;2;-6).$$
$$\overrightarrow{CD}(2-5;6-7;6-3)\text{, soit }\overrightarrow{CD}(-3;-1;3).$$

On a donc $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$ et, de fait :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. On a cette fois :

$$\overrightarrow{AB}(0-6;1-4;3-1)\text{, soit }\overrightarrow{AB}(-6;-3;2).$$
$$\overrightarrow{CD}(-4-(-2);6-3;5-4)\text{, soit }\overrightarrow{CD}(-2;3;1).$$

Comme $\frac{-6}{-2}=3\neq-1=\frac{-3}{3}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

Donc :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

N°72 page 280

Considérons le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Le point I est le milieu du segment $[AE]$. On a donc : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

Ainsi, dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a : $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

Le point J est le centre de la face $CDHG$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Ainsi, dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a : $J\left(\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

Le point P est défini par : $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.

D'où : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Ainsi, dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a : $P\left(0\,;\frac{1}{3}\,;1\right)$.

Le point Q est défini par : $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D'où : $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi, dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a : $Q\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$.

Le point K est le milieu du segment $[PQ]$.

Ainsi, dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a : $K\left(\dfrac{0+\frac{1}{3}}{2}\,;\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2}\,;\dfrac{1+0}{2}\right)$.

Soit : $K\left(\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

A partir de $I\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $J\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{2}\right)$, on obtient facilement :

$\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{2}-0\,;1-0\,;\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$, soit $\overrightarrow{IJ}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;0\right)$.

Et aussi : $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{1}{6}-0\,;\dfrac{1}{3}-0\,;\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$, soit : $\overrightarrow{IK}\left(\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{1}{3}\,;0\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$ et, de fait :

Les points *I*, *J* et *K* sont alignés.

N°75 page 280

1. A l'aide des coordonnées fournies, on obtient facilement : $\overrightarrow{AB}(4\,;2\,;-6)$, $\overrightarrow{AC}(3\,;-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{AD}(-4\,;5\,;1)$.

   Les points *A*, *B*, *C* et *D* sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ le sont, c'est-à-dire s'il existe deux réels *x* et *y* tels que : $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$.

   On a alors :

$$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}4=3x-4y\\2=-2x+5y\\-6=-2x+y\end{cases}$$

   Considérons le système formé des deux dernières équations : $\begin{cases}2=-2x+5y\\-6=-2x+y\end{cases}$.

   En les soustrayant membre à membre, on obtient immédiatement : $4y=8$, soit $y=2$.

   Il vient alors : $x=\dfrac{y+6}{2}=4$.

On constate alors que la première équation du système initial, $4=3x-4y$, est bien vérifiée pour ces valeurs de x et y. On en déduit donc :

$$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}4=3x-4y\\2=-2x+5y\\-6=-2x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

$$\boxed{\text{Les points } A, B, C \text{ et } D \text{ sont coplanaires.}}$$

2. On procède comme précédemment.

   On obtient : $\overrightarrow{AB}(-7\,;1\,;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-5\,;0\,;3)$ et $\overrightarrow{AD}\left(4\,;\dfrac{1}{2}\,;-5\right)$.

   On a alors :

$$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}-7=-5x+4y\\1=\dfrac{1}{2}y\\-1=3x-5y\end{cases}$$

   La deuxième équation donne immédiatement $y=2$.

   La première donne alors : $x=\dfrac{4y+7}{5}=\dfrac{15}{5}=3$.

   On constate alors que la troisième équation est vérifiée pour $x=3$ et $y=2$.

   On a donc :

$$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\begin{cases}4=3x-4y\\2=-2x+5y\\-6=-2x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

$$\boxed{\text{Les points } A, B, C \text{ et } D \text{ sont coplanaires.}}$$

N°76 page 280

1. On obtient facilement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Comme les ordonnées des deux vecteurs sont opposées mais que ce n'est pas le cas pour leurs abscisses (ou leurs cotes), on en déduit immédiatement qu'ils ne sont pas colinéaires. Finalement :

Les points A, B et C définissent un plan.

2. On peut, pour simplifier les calculs, poser $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. En travaillant avec le repère $\left(A\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ du plan $\left(ABC\right)$, on a :

$$O\in\left(ABC\right)\Leftrightarrow \text{ il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \overrightarrow{AO}=a\vec{u}+b\vec{v}\,.$$

Comme on a : $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, il vient :

$$\overrightarrow{AO}=a\vec{u}+b\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\2a-b=0\\-a-b=-1\end{cases}$$

On remarque que la première et la dernière égalité sont équivalentes et on a :

$$\overrightarrow{AO}=a\vec{u}+b\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\2a-b=0\\-a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\2a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2a=1\\b=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

On a donc : $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$.

Le point O appartient au plan $\left(ABC\right)$.

N°80 page 281

Dans chacune des situations proposées, les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite seront données par les coefficients du paramètre et on obtiendra celles de deux points de la droite en en donnant au paramètre deux valeurs distinctes (ici on a choisi 0 et 1).

a. On a : $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ puis, pour $t=0$: $A_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et pour $t=1$: $B_1\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$.

b. On a : $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ puis, pour $u=0$: $A_2\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ et pour $u=1$: $B_2\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}$.

N°86 page 281

1. Le vecteur $\vec{u}(1;-1;1)$ (coefficients de t dans la représentation paramétrique fournie) est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. De même, $\vec{v}(2;1;5)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

   Les coordonnées de ces deux vecteurs n'étant pas proportionnelles, ils ne sont pas colinéaires et on en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et (d) ne sont pas parallèles.

   Cherchons-en alors un éventuel point d'intersection.

   On cherche un éventuel couple de réels $(t;u)$ tel que :

$$\begin{cases} 5+t=3+2u \\ 1-t=2+u \\ -3+t=-6+5u \end{cases}$$

   On a facilement :

$$\begin{cases} t-2u=-2 \\ t+u=-1 \\ t-5u=-3 \end{cases}$$

   Avec les deux premières équations, on obtient :

$$\begin{cases} t+u=-1 \\ t-5u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-t-1 \\ t-5u=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-t-1 \\ t-5(-t-1)=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=-t-1 \\ 6t+5=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-t-1 \\ t=\frac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-\frac{-4}{3}-1 \\ t=\frac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{3} \\ t=\frac{-4}{3} \end{cases}$$

   Il vient alors : $t-5u=\frac{-4}{3}-5\times\frac{1}{3}=\frac{-4-5}{3}=-3$.
   La troisième équation du système initial est bien vérifiée.
   Pour $t=\frac{-4}{3}$ et $u=\frac{1}{3}$, on vérifie que l'on a :

$$\begin{cases} x = 5 + t = 3 + 2u = \dfrac{11}{3} \\ y = 1 - t = 2 + u = \dfrac{7}{3} \\ z = -3 + t = -6 + 5u = \dfrac{-13}{3} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les droites } \mathscr{D} \text{ et } (d) \text{ sont sécantes en } A\left(\frac{11}{3}\,;\frac{7}{3}\,;\frac{-13}{3}\right).}$$

2. On procède comme précédemment.
   Le vecteur $\vec{u}(-1\,;3\,;1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. De même, $\vec{v}(2\,;-6\,;-2)$ est un vecteur directeur de la droite (d).
   Comme $\vec{v} = -2\vec{u}$, ces vecteurs sont colinéaires et on en déduit immédiatement que les droites $\mathscr{D}$ et (d) sont parallèles.

   On doit alors s'interroger : sont-elles strictement parallèles ou confondues ?

   $A(1\,;2\,;0)$ est un point de $\mathscr{D}$ directement obtenu à partir de la représentation paramétrique fournie en choisissant $t = 0$. Le point A appartient-il à (d) ?

   On cherche un réel u tel que :

$$\begin{cases} 1 = 2u \\ 2 = 5 - 6u \\ 0 = 1 - 2u \end{cases}$$

   La première équation donne immédiatement $u = \dfrac{1}{2}$. On constate alors facilement que cette valeur de u vérifie les deux autres équations.
   On en déduit donc que A est le point de (d) de paramètre $u = \dfrac{1}{2}$.
   Les droites $\mathscr{D}$ et (d) étant parallèles et possédant un point commun, elles sont confondues.

$$\boxed{\text{Les droites } \mathscr{D} \text{ et } (d) \text{ sont confondues.}}$$

3. Le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. De même, $\vec{v}(-1\,;2\,;2)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

   Les coordonnées de ces deux vecteurs n'étant pas proportionnelles, ils ne sont pas colinéaires et on en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et (d) ne sont pas parallèles.

   Cherchons-en alors un éventuel point d'intersection.

   On cherche un éventuel couple de réels $(t\,;u)$ tel que :

$$\begin{cases} -1+2t=3-u \\ 4-t=1+2u \\ 3+t=5+2u \end{cases}$$

   On a facilement :

$$\begin{cases} 2t+u=4 \\ t+2u=3 \\ t-2u=2 \end{cases}$$

   Avec les deux dernières équations, on obtient :

$$\begin{cases} t+2u=3 \\ t-2u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{t}{2}-1 \\ 2t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{t}{2}-1 \\ t=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{4} \\ t=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

   Il vient alors : $2t+u=2\times\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{4}=5+\dfrac{1}{4}=\dfrac{21}{4}\neq 4$.
   La troisième équation du système initial n'est pas vérifiée.
   On en déduit que les deux droites ne sont pas sécantes.

Les droites $\mathscr{D}$ et (d) ne sont pas coplanaires.

N°87 page 281

1. On a facilement : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ont la même cote. S'ils étaient colinéaires, ils seraient donc nécessairement égaux. Comme ce n'est pas le cas, on en conclut qu'ils ne sont pas colinéaires et donc que les points A, B et C définissent bien un plan.

Les points A, B et C définissent un plan.

2. On a $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$. Cherchons deux réels a et b tels que $\overrightarrow{DE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

   On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{DE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}a-2b=5\\3a+2b=3\\-4a-4b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=5\\(3a+2b)+(a-2b)=3+5\\-4a-4b=-2\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}a-2b=5\\4a=8\\-4a-4b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=5\\a=2\\-8-4b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2b=5\\a=2\\4b=-6\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}a=2\\b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

   Comme $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, on en conclut immédiatement :

La droite (DE) est parallèle au plan (ABC).

N°94 page 284

1. $ABCD$ étant un tétraèdre, les points A, B, C ne sont pas alignés et ils définissent bien un plan. Par ailleurs, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires (par exemple, le point D n'appartient pas au plan (ABC)) et il en va donc de même pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Finalement :

$\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ est bien un repère de l'espace.

2. Comme $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, on a immédiatement : $I\left(\frac{1}{4}\,;0\,;0\right)$.

Par ailleurs, le point J est le milieu du segment $[AC]$. On a donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et on en tire : $J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

Comme $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, on a immédiatement : $K\left(0\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$.

Enfin, le point G étant le centre de gravité du triangle BCD, on a : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$

D'où : $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{I\left(\frac{1}{4}\,;0\,;0\right),\ J\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right),\ K\left(0\,;0\,;\frac{2}{3}\right)\text{ et } G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right).}$$

A partir des résultats précédents, on a : $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{4}\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}$. D'où : $\overrightarrow{IL}\left(\frac{k}{3}-\frac{1}{4}\,;\frac{k}{3}\,;\frac{k}{3}\right)$.

$$\boxed{\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,;0\right),\ \overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{4}\,;0\,;\frac{2}{3}\right)\text{ et } \overrightarrow{IL}\left(\frac{k}{3}-\frac{1}{4}\,;\frac{k}{3}\,;\frac{k}{3}\right)}$$

3. Comme les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires, il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{IL}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IK}$$

A l'aide des coordonnées de ces vecteurs, il vient :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{IL}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IK}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}\frac{k}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{a}{4}-\frac{b}{4}\\ \frac{k}{3}=\frac{a}{2}\\ \frac{k}{3}=\frac{2b}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{k}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{a}{4}-\frac{b}{4}\\ a=2\times\frac{k}{3}\\ b=\frac{3}{2}\times\frac{k}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{k}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\times\frac{k}{3}\times\left(2+\frac{3}{2}\right)\\ a=2\times\frac{k}{3}\\ b=\frac{3}{2}\times\frac{k}{3}\end{cases}\end{aligned}$$

Le réel k vérifie donc l'équation : $\frac{k}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\times\frac{k}{3}\times\left(2+\frac{3}{2}\right)$.

On a :

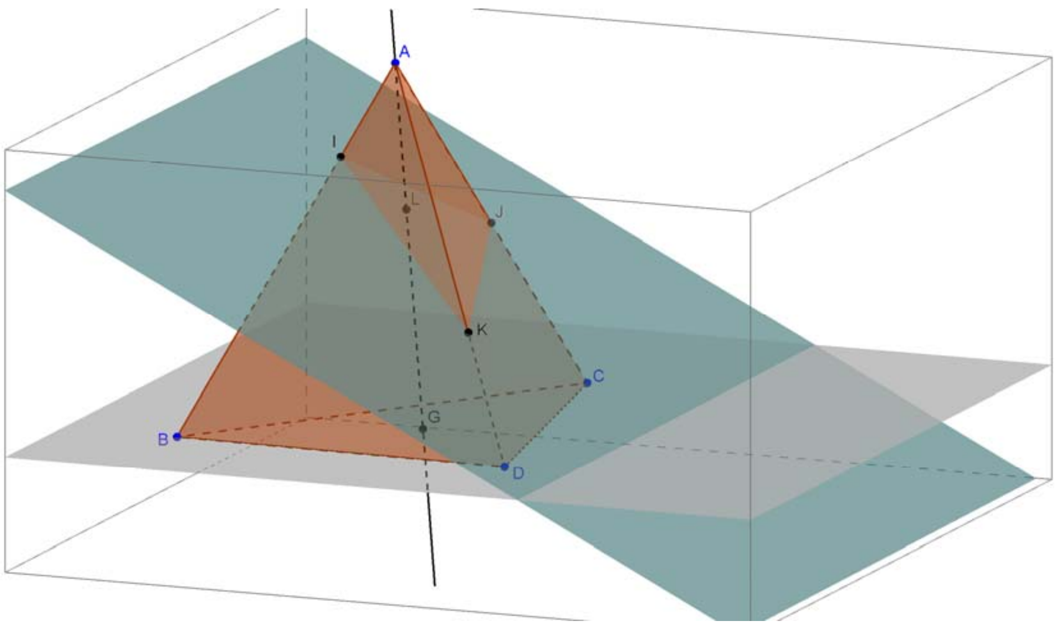
$$\frac{k}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\times\frac{k}{3}\times\left(2+\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow 4k-3=-\frac{7}{2}k\Leftrightarrow 8k-6=-7k\Leftrightarrow 15k-6=0\Leftrightarrow 5k-2=0$$

Le réel k est solution de l'équation : $5k-2=0$.

4. On a immédiatement : $5k-2=0\Leftrightarrow k=\frac{2}{5}$. On en déduit ainsi que le point L est situé sur le segment $[AG]$ avec $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AG}$.

$$\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AG}$$

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique de la situation obtenue grâce à Geogebra (3D) :



N°100 page 285

Rappelons que les faces opposées d'un parallélépipède sont parallèles. On en déduit alors que ces faces sont des parallélogrammes.

1. On a :

$$\overrightarrow{EO_1} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}$$

On a donc : $O_1\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$.

On a aussi :

$$\overrightarrow{EO_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

D'où : $O_2\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

Comme G_1 est le centre de gravité du triangle BDE et comme O_1 est le milieu du segment $[BD]$, on a : $\overrightarrow{EG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EO_1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$.

D'où : $G_1\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

Comme :

- G_2 est le centre de gravité du triangle CFH.
- O_2 est le milieu du segment $[HF]$.
- EO_1CO_2 est un parallélogramme (on a facilement $\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{EO_2}$).

il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG_2} &= \overrightarrow{EO_2} + \overrightarrow{O_2G_2} = \overrightarrow{EO_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{O_2C} = \overrightarrow{EO_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EO_1} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}\end{aligned}$$

D'où : $G_2\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

$$O_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right),\ O_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right),\ G_1\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\text{ et }G_2\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right).$$

2. On a immédiatement $A(0;0;1)$.

   Comme : $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EF}$, il vient : $G(1;1;0)$ puis : $\overrightarrow{AG}(1;1;-1)$

   En utilisant les résultats de la question précédente, il vient :

   $$\overrightarrow{AG_1}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}-1\right),\text{ soit : }\overrightarrow{AG_1}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)\text{ et donc }\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$$

   $$\overrightarrow{AG_2}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}-1\right),\text{ soit }\overrightarrow{AG_2}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)\text{ et donc }\overrightarrow{AG_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AG_1}$ et $\overrightarrow{AG_2}$ étant colinéaires, on en déduit que les points G_1 et G_2 appartiennent à la droite (AG). Les points *A*, G_1, G_2 et *G* sont donc alignés.

   Les points *A*, G_1, G_2 et *G* sont alignés.

3. Sur la droite (AG), on peut considérer le repère $\left(A;\overrightarrow{AG}\right)$. D'après la question précédente, les points G_1, G_2 et *G* admettent alors comme abscisses respectives : $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ et 1.

   On en déduit immédiatement :

   Les points *A*, G_1, G_2 et *G* sont alignés dans cet ordre
   et les points G_1 et G_2 partagent le segment $[AG]$ en trois segments de même longueur.

N°105 page 286

Les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan.

Comme la droite (AB) du plan (ABC) coupe le plan $\mathscr{P}$, les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants (ils ne sont pas confondus puis les points *A*, *B* et *C* n'appartiennent pas à $\mathscr{P}$).

L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC) est une droite. Nous la notons (d).
Or, les droites (AB), (AB) et (AB) du plan (ABC) coupent le plan $\mathscr{P}$ en A', B' et C'.
Ces points appartiennent dont à l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC), c'est-à-dire à la droite (d). Ils sont donc alignés.

Les points A', B' et C' sont alignés.

N°108 page 287

1. a. On peut (doit ? ☺) avoir l'intuition que le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme
Avec deux parallélogrammes et quatre milieux, c'est plutôt « légitime » …

Intéressons-nous donc au vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

On a :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'J}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'J} \\ &= \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} + \left(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{B'J}\right) \end{aligned}$$

Comme *I* est le milieu du segment $[AA']$ et *J* celui du segment $[BB']$, il vient :
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{B'J} = \vec{0}$ et donc : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}$.
De façon analogue, on montre : $2\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D'C'}$.

Comme *ABCD* et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$.

On a donc : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D'C'} = 2\overrightarrow{LK}$.
Finalement : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et on en déduit que le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme.

Le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme.

b. *IJKL* étant un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IJ}$.
L'égalité $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IJ}$ nous permet immédiatement de conclure :

Les points *I*, *J*, *K* et *L* sont coplanaires.

2. Ici encore, l'intuition peut être bonne conseillère ! Le point O'' ne serait-il pas le milieu du segment $[OO']$?

On adopte une démarche très proche de celle de la question 1.a.

On a :

$$\overrightarrow{O''O} = \overrightarrow{O''I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO}$$
$$\overrightarrow{O''O} = \overrightarrow{O''K} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CO}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{O''O} &= \overrightarrow{O''I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O''K} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CO} \\ &= \left(\overrightarrow{O''I} + \overrightarrow{O''K}\right) + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{KC} + \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}\right) \end{aligned}$$

Comme les points O'' et O sont les milieux respectifs des segments $\left[IK\right]$ et $\left[AC\right]$, on a : $\overrightarrow{O''I} + \overrightarrow{O''K} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$ et donc : $2\overrightarrow{O''O} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{KC}$.

En procédant de façon similaire avec les points O et O', on obtient cette fois : $2\overrightarrow{O''O'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{KC'}$.

En additionnant membre à membre les égalités $2\overrightarrow{O''O} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{KC}$ et $2\overrightarrow{O''O'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{KC'}$, on obtient : $2\overrightarrow{O''O} + 2\overrightarrow{O''O'} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{KC'} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'}\right) + \left(\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'}\right)$.

Comme les points I et K sont les milieux respectifs des segments $\left[AA'\right]$ et $\left[CC'\right]$, on a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KC'} = \vec{0}$ et, finalement : $\overrightarrow{O''O} + \overrightarrow{O''O'} = \vec{0}$.

Ainsi, le point O est bien le milieu du segment $\left[OO'\right]$.

Les points O, O' et O'' sont alignés. Plus précisément, le point O est le milieu du segment $\left[OO'\right]$.