Conditionnement et indépendance

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 366 : N°**19**
Page 367 : N°**24**, **27**, **29**, **31**
Page 368 : N°**33**, **36**
Page 371 : N°**44**

N°19 page 366

On considère les deux événements :

- A : « Le prix du repas est strictement inférieur à 25€ » ;
- B : « Le prix du repas est supérieur ou égal à 15€ ».

a. Calcul de $p(A)$.

Le montant devant être inférieur strictement à 25€, on obtient la probabilité cherchée en additionnant les fréquences correspondant aux classes $[10;15[$, $[15;20[$ et $[20;25[$:

$$p(A)=0,12+0,25+0,36=0,73$$

La probabilité de l'événement A est égale à 0,73.

Calcul de $p(B)$.

On pourrait procéder comme précédemment et additionner les fréquences correspondant aux classes : $[15;20[$, $[20;25[$, $[25;30[$ et $[30;35[$. On peut également raisonner sur l'événement contraire $\overline{B}$: « Le prix du repas est strictement inférieur à 15€ ».
La probabilité de $\overline{B}$ est « simplement » la fréquence associée à la classe $[10;15[$, soit 0,12.

Comme $p(\overline{B})=0,12$, on a : $p(B)=1-p(\overline{B})=1-0,12=0,88$.

La probabilité de l'événement B est égale à 0,88.

Calcul de $p(A \cap B)$.

L'événement $A \cap B$ est réalisé lorsque le montant est supérieur ou égal à 15€ et strictement inférieur à 25€. On obtient ainsi la probabilité cherchée en additionnant les fréquences correspondant aux classes $[15;20[$ et $[20;25[$:

$$p(A \cap B) = 0,25 + 0,36 = 0,61$$

La probabilité de l'événement $A \cap B$ est égale à 0,61.

b. On cherche maintenant : $p(A | B)$.

Par définition, on a : $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Avec les valeurs obtenues à la question précédente, il vient :

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,61}{0,88} = \frac{61}{88}$$

La probabilité que l'événement A sachant que B est réalisé est égale à $\dfrac{61}{88}$.

N°24 page 367

1. a) Si $B = \varnothing$ ou si $\overline{B} = \varnothing$, l'égalité est aisément vérifiée.
Supposons donc que l'on ait : $B \neq \varnothing$ et $\overline{B} \neq \varnothing$. Dans ces conditions, *B* et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers et la formule des probabilités totales nous donne immédiatement, pour l'événement *A* :

$$\boxed{p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$$

Le résultat est ainsi établi pour toutes les situations.

Remarque : l'hypothèse d'indépendance des événements *A* et *B* est ici inutile.

b) Comme les événements *A* et *B* sont indépendants, on a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
L'égalité obtenue à la question précédente se récrit alors :

$$p(A) = p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B})$$

On en déduit :

$$p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)-p(A)\times p(B)=p(A)\times\left[1-p(B)\right]=p(A)\times p\left(\overline{B}\right)$$

Comme $p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)\times p\left(\overline{B}\right)$, on en déduit finalement :

Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2. Nous procédons comme précédemment mais en tenant compte cette fois du fait que les événements *A* et *B*, d'une part, et *A* et $\overline{B}$, d'autre part, sont indépendants.

   Si $A=\varnothing$ ou si $\overline{A}=\varnothing$, on a facilement : $p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap\overline{A}\right)$.
   Si $A\neq\varnothing$ et si $\overline{A}\neq\varnothing$, alors *A* et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers et l'égalité ci-dessus découle de la formule des probabilités totales appliquées à l'événement *B*.

   L'indépendance des événements *A* et *B* nous permet cette fois d'écrire :

$$p\left(B\cap\overline{A}\right)=p(B)-p(B\cap A)=p(B)-p(A)\times p(B)=p(B)\times\left[1-p(A)\right]=p(B)\times p\left(\overline{A}\right)$$

   On en déduit :

Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

   Remarque : dans ce qui précède, les événements *A* et *B* jouent des rôles symétriques. A la première question, nous avons en fait établi le résultat général suivant :

   Si deux événements sont indépendants **alors** l'un des événements et le complémentaire de l'autre sont également indépendants.

   On pouvait ainsi immédiatement conclure que les événements $\overline{A}$ et *B* sont indépendants.

   Avec $A=\varnothing$ ou si $\overline{A}=\varnothing$, on a, toujours facilement : $p\left(\overline{B}\right)=p\left(\overline{B}\cap A\right)+p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$.
   Avec $A\neq\varnothing$ et $\overline{A}\neq\varnothing$, alors *A* et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers et l'égalité ci-dessus découle de la formule des probabilités totales appliquées à l'événement $\overline{B}$.

   Comme on a vu que les événements *A* et $\overline{B}$ étaient indépendants, l'égalité ci-dessus donne :

$$p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=p\left(\overline{B}\right)-p\left(\overline{B}\cap A\right)=p\left(\overline{B}\right)-p\left(\overline{B}\right)\times p(A)=p\left(\overline{B}\right)\times\left[1-p(A)\right]=p\left(\overline{B}\right)\times p\left(\overline{A}\right)$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{\text{Les événements } \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants.}}$$

Remarque : en s'appuyant sur la remarque précédente et en partant du principe que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants, on pouvait conclure directement.

N°27 page 367

1. Introduisons les événements suivants :

- P_1 : « On obtient PILE au premier lancé » ;
- P_2 : « On obtient PILE au second lancé ».

La pièce de monnaie étant supposée non truquée, on a : $p(P_1) = p(P_2) = \frac{1}{2}$.

Dans ces conditions, l'événement $(X = 0)$ correspond à l'événement $\overline{P_1} \cap \overline{P_2}$.
Les événements P_1 et P_2 étant indépendants (l'obtention de PILE au premier lancé ne dépend en rien de l'obtention de PILE au second lancé), il en va de même des événements $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$ (voir, par exemple, l'exercice précédent).

On a alors : $p(X = 0) = p\left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{p(X = 0) = \frac{1}{4}}$$

L'événement $(Y = 1)$ correspond à l'événement P_1.
On a donc immédiatement : $p(Y = 1) = p(P_1) = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{p(Y = 1) = \frac{1}{2}}$$

Les événements « $Y = 1$ » et « $X = 0$ » sont incompatibles. En effet, si l'événement « $Y = 1$ » est réalisé alors la variable aléatoire X prendra soit la valeur 1 (on obtient FACE au second lancé) soit la valeur 2 (on obtient PILE au second lancé). On a donc :
$(X = 0) \cap (Y = 1) = \varnothing$ et, immédiatement :

$$\boxed{p\left((X = 0) \cap (Y = 1)\right) = 0}$$

2. Introduisons les événements suivants :

   Si les variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, on aurait :

$$p\left(\left(X=0\right)\cap\left(Y=1\right)\right)=p\left(X=0\right)\times p\left(Y=1\right)$$

   Comme $p\left(\left(X=0\right)\cap\left(Y=1\right)\right)=0$ et $p\left(X=0\right)\times p\left(Y=1\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, on a donc ici :

$$p\left(\left(X=0\right)\cap\left(Y=1\right)\right)\neq p\left(X=0\right)\times p\left(Y=1\right)$$

   On en déduit finalement :

Les variables aléatoires *X* et *Y* ne sont pas indépendantes.

N°29 page 367

En guise de préambule, notons :

- *B* l'événement « Obtenir un jeton blanc » ;
- U_1 l'événement « Le jeton a été tiré dans l'urne U_1 » ;
- U_2 l'événement « Le jeton a été tiré dans l'urne U_2 ».

a. Puisque l'urne U_1 contient 5 jetons blancs pour un total de 12 jetons, on a :

$$\boxed{p\left(B\,|\,U_1\right)=\frac{5}{12}}$$

b. En raisonnant de façon analogue, on obtient immédiatement :

$$\boxed{p\left(B\,|\,U_2\right)=\frac{5}{8}}$$

c. Puisque l'on tire un jeton soit dans l'urne U_1, soit dans l'urne U_2 et qu'on ne peut tirer le jeton dans les deux à la fois (!) on peut affirmer que les événements U_1 et U_2 forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales appliquées à l'événement *B* s'écrit :

$$p\left(B\right)=p\left(B\cap U_1\right)+p\left(B\cap U_2\right)=p\left(B\,|\,U_1\right)\times p\left(U_1\right)+p\left(B\,|\,U_2\right)\times p\left(U_2\right)$$

Les urnes étant indiscernables, il vient : $p(\mathrm{U}_1)=p(\mathrm{U}_2)=\frac{1}{2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}p(B)&=p(B\,|\,\mathrm{U}_1)\times p(\mathrm{U}_1)+p(B\,|\,\mathrm{U}_2)\times p(\mathrm{U}_2)\\&=\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{5}{24}\times\frac{1}{2}\times(2+3)\\&=\frac{25}{48}\end{aligned}$$

La probabilité que le jeton tiré soit blanc vaut $\frac{25}{48}$.

N°31 page 367

Introduisons les événements :

- V : « Le client achète la veste de ce modèle » ;
- P : « Le client achète le pantalon de ce modèle ».

D'après l'énoncé, on a :

- $p(V)=0,2$;
- $p(P\,|\,V)=0,7$;
- $p(P\,|\,\overline{V})=0,1$.

a. On cherche ici $p(P\cap V)$. Les deux premières probabilités ci-dessus vont nous permettre de répondre. En effet, on a : $p(P\,|\,V)=\frac{p(P\cap V)}{p(V)}$. Il vient alors :

$$p(P\cap V)=p(P\,|\,V)\times p(V)=0,7\times0,2=0,14$$

La probabilité que le client achète l'ensemble pantalon + veste est bien égale à 0,14.

b. On cherche ici $p(P)$.

Les événements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers en tant qu'événements complémentaires de probabilités non nulles.

On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(P)=p(P\cap V)+p\left(P\cap\overline{V}\right)=p(P|V)\times p(V)+p\left(P|\overline{V}\right)\times p\left(\overline{V}\right)$$

Toutes les probabilités requises sont connues sauf $p\left(\overline{V}\right)$.

Mais on a simplement : $p\left(\overline{V}\right)=1-p(V)$.

D'où :

$$\begin{aligned} p(P)&=p(P\cap V)+p\left(P|\overline{V}\right)\times p\left(\overline{V}\right)\\ &=p(P\cap V)+p\left(P|\overline{V}\right)\times\left(1-p(V)\right)\\ &=0{,}14+0{,}1\times(1-0{,}2)\\ &=0{,}14+0{,}08\\ &=0{,}22 \end{aligned}$$

La probabilité que le client achète le pantalon est égale à 0,22.

c. On cherche ici $p(P\cup V)$.

On a : $p(P\cup V)=p(P)+p(V)-p(P\cap V)$.

Toutes les probabilités requises sont connues. Il vient :

$$\begin{aligned} p(P\cup V)&=p(P)+p(V)-p(P\cap V)\\ &=0{,}22+0{,}2-0{,}14\\ &=0{,}28 \end{aligned}$$

La probabilité que le client achète la veste ou le pantalon est égale à 0,28.

d. Si le client :

- Achète la veste et le pantalon, on a : $X=190+80=270$. Cette situation correspond à l'événement : $P\cap V$. Or, d'après la question a), on a : $p(P\cap V)=0{,}14$. On en déduit immédiatement : $p(X=270)=0{,}14$;
- Achète le pantalon mais pas la veste, on a : $X=80$. Cette situation correspond à l'événement : $P\cap\overline{V}$.

  Or, d'après la question b), on a : $p(P)=p(P\cap V)+p\left(P\cap\overline{V}\right)=0{,}22$.

  Il vient alors : $p\left(P\cap\overline{V}\right)=p(P)-p(P\cap V)=0{,}22-0{,}14=0{,}08$;

1. Achète la veste mais pas le pantalon, on a : $X = 190$. Cette situation correspond à l'événement : $\overline{P} \cap V$.
   Or, les événements P et $\overline{P}$ formant une partition de l'univers, on a :
   $p(V) = p(V \cap P) + p(V \cap \overline{P})$.
   Il vient alors : $p(V \cap \overline{P}) = p(V) - p(V \cap P) = 0,2 - 0,14 = 0,06$:
2. N'achète ni le pantalon, ni la veste, on a : $X = 0$. Cette situation correspond à l'événement : $\overline{P} \cap \overline{V}$. On a immédiatement :

$$\begin{aligned} p(\overline{P} \cap \overline{V}) &= 1 - \left[p(\overline{P} \cap V) + p(P \cap \overline{V}) + p(P \cap V) \right] \\ &= 1 - (0,14 + 0,08 + 0,06) \\ &= 1 - 0,28 \\ &= 0,72 \end{aligned}$$

Finalement, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par :

k	0	80	190	270
$p(X = k)$	0,72	0,08	0,06	0,14

N°33 page 368

D'après l'énoncé, on a :

- $p(F) = 95\% = 0,95$;
- $p_F(T) = 96\% = 0,96$;
- $p_{\overline{F}}(T) = 8\% = 0,08$.

1. a) On cherche ici $p(\overline{T} \cap F)$.

   On a :

$$\begin{aligned} p(\overline{T} \cap F) &= p_F(\overline{T}) \times p(F) = \left[1 - p_F(T)\right] \times p(F) \\ &= (1 - 0,96) \times 0,95 \\ &= 0,038 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du teste et qu'il soit en état de fonctionnement est égale à 0,038 (soit 3,8%).

b) On cherche cette fois : $p(\overline{T} \cap \overline{F})$.

On a :

$$
\begin{aligned}
p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right) &= p_{\overline{F}}\left(\overline{T}\right)\times p\left(\overline{F}\right)=\left[1-p_{\overline{F}}\left(T\right)\right]\times\left[1-p\left(F\right)\right]\\
&=\left(1-0,08\right)\times\left(1-0,95\right)\\
&=0,92\times 0,05\\
&=0,046
\end{aligned}
$$

La probabilité qu’un téléviseur soit refusé à l’issue du teste et qu’il ne soit en état de fonctionnement est égale à 0,046 (soit 4,6%).

c) On cherche ici $p\left(\overline{T}\right)$.

On a : $p\left(\overline{T}\right)= p\left(\overline{T}\cap F\right)+ p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)$. En utilisant les résultat des deux questions précédentes, il vient alors :

$$p\left(\overline{T}\right)= p\left(\overline{T}\cap F\right)+ p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)=0,038+0,046=0,084$$

La probabilité qu’un téléviseur soit refusé à l’issue du teste est égale à 0,084 (soit 8,4%).

2. On cherche ici $p_{\overline{T}}\left(F\right)$.

On a : $p_{\overline{T}}\left(F\right)=\dfrac{p\left(\overline{T}\cap F\right)}{p\left(\overline{T}\right)}$. A l’aide des questions 1.a) et 1.c), il vient :

$$p_{\overline{T}}\left(F\right)=\frac{p\left(\overline{T}\cap F\right)}{p\left(\overline{T}\right)}=\frac{0,038}{0,084}=\frac{38}{84}=\frac{19}{42}\simeq 0,452$$

La probabilité qu’un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu’il a été refusé à l’issue du test est égale à $\dfrac{19}{42}$ soit, à 10^{-3} près, 0,452 (soit 45,2%).

Ce résultat mérite un petit commentaire.
Près d’un téléviseur sur deux refusé à l’issue du test est en fait en état de fonctionnement !
Dans ces conditions, on ne peut pas dire que le test soit d’une grande valeur (cf. l’activité 4 p363) …

N°36 page 368

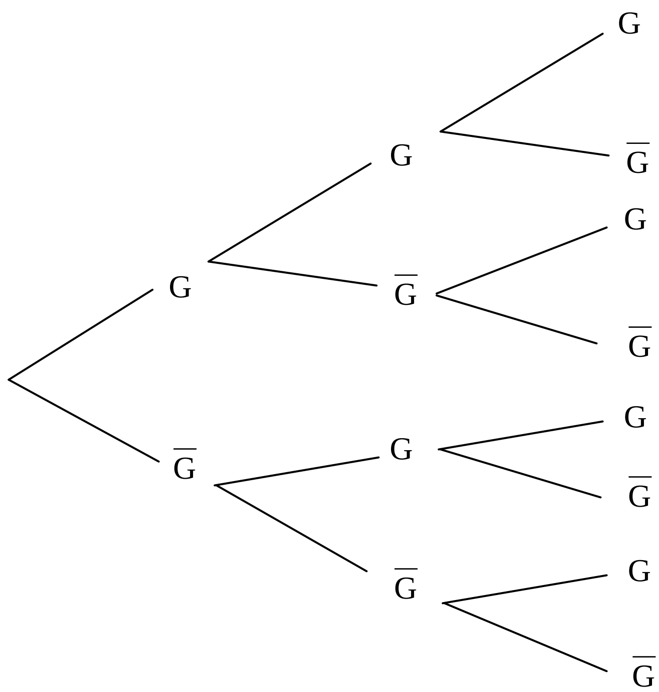
Probabilité pour qu'un nouveau-né soit un garçon : 0,51.

Deux naissances différentes sont considérées comme des événements indépendants.

1. **Cas de trois naissances**

   On considère donc ici une liste de trois naissances, chaque naissance étant indépendante des deux autres.

   Si on note G l'événement « Obtenir un garçon » pour une naissance donnée, on peut s'aider de la représentation de la page suivante (arbre) :



   a. Soit l'événement A : « Il ne naît aucun garçon ».

      Cet événement correspond à la liste $\overline{G}\overline{G}\overline{G}$.
      On a donc : $p(A) = p(\overline{G}) \times p(\overline{G}) \times p(\overline{G}) = p(\overline{G})^3 = (1 - p(G))^3 = 0,49^3 = 0,117649$

La probabilité qu'il ne naisse aucun garçon est environ égale à 0,118
(valeur arrondie à 10^{-3} près).

   b. Soit l'événement B : « il naît un et un seul garçon ».

Cet événement correspond aux trois listes suivantes : $G\overline{G}\overline{G}$, $\overline{G}G\overline{G}$ et $\overline{G}\overline{G}G$.
(le garçon naît en première, deuxième ou troisième position).

Chacune de ces issues a la probabilité $0,51 \times 0,49^2$ de se réaliser.
On en déduit : $p(\mathrm{B}) = 3 \times 0,51 \times 0,49^2 = 0,367353$.

La probabilité qu'il naisse exactement un garçon est environ égale à 0,367 (valeur arrondie à 10^{-3} près).

c. Soit l'événement C : « il naît au moins un garçon ».

Cet événement est l'événement contraire de l'événement A.

On a donc : $p(\mathrm{C}) = p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - 0,117649 = 0,882351$.

La probabilité qu'il naisse au moins un garçon est environ égale à 0,882 (valeur arrondie à 10^{-3} près).

2. Cas de *n* naissances (*n* entier strictement positif)

Cette question vise à généraliser la situation précédente et les résultats obtenus.

a. Soit l'événement C_n : « Il naît au moins un garçon ».
Comme dans le c de la question précédente, nous allons utiliser le fait que cet événement l'événement contraire de l'événement A_n : « il ne naît aucun garçon ».

L'événement A_n correspond à la liste : $\underbrace{\overline{G}\overline{G}...\overline{G}}_{n \text{ fois}}$. Chaque événement de cette liste ayant une probabilité de se réaliser égale à 0,49 on peut écrire :

$$p(\mathrm{A}_n) = p(\overline{\mathrm{G}})^n = (1 - p(\mathrm{G}))^n = 0,49^n$$

Comme : $p(\mathrm{C}_n) = 1 - p(\mathrm{A}_n)$, on obtient : $\boxed{p(\mathrm{C}_n) = 1 - 0,49^n}$

b. On cherche ici le nombre minimum de naissances à envisager pour que la probabilité qu'il naisse au moins un garçon soit supérieure à 0,99.

Il convient donc de résoudre l'équation : $p(\mathrm{C}_n) > 0,99$, c'est à dire, d'après la question précédente : $1 - 0,49^n > 0,99$.

Nous pouvons récrire cette inégalité comme suit : $0,49^n < 0,01$

Chaque membre de cette inéquation étant strictement positif, on a :

$$0,49^n < 0,01 \Leftrightarrow \ln\left(0,49^n\right) < \ln 0,01 \Leftrightarrow n\ln 0,49 < \ln 10^{-2} \Leftrightarrow n\ln 0,49 < -2\times\ln 10$$

En tenant compte du fait que $\ln 0,49$ est strictement négatif, on a finalement :

$$0,49^n < 0,01 \Leftrightarrow n\ln 0,49 < -2\times\ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{-2\times\ln 10}{\ln 0,49}$$

Comme $\frac{-2\times\ln 10}{\ln 0,49} \simeq 6,46$ (à 10^{-2} près), on en déduit finalement que le plus petit entier n tel que la probabilité $p\left(\mathrm{C}_n\right)$ soit strictement supérieure à 0,99 vaut 7.

A partir de 7 naissances, la probabilité d'obtenir au moins un garçon est donc supérieure à 0,99.

N°44 page 371

1. On a déjà : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

   On nous précise que les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$ sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétiques de raison r. On peut donc écrire :

$$p_2 = p_1 + r\ ,\ p_3 = p_1 + 2r\ ,\ p_4 = p_1 + 3r\ ,\ p_5 = p_1 + 4r \text{ et } p_6 = p_1 + 5r$$

   L'égalité : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ se récrit alors :

$$p_1 + \left(p_1 + r\right) + \left(p_1 + 2r\right) + \left(p_1 + 3r\right) + \left(p_1 + 4r\right) + \left(p_1 + 5r\right) = 1$$

   Soit : $6p_1 + r\left(1+2+3+4+5\right) = 1$.

   Soit enfin : $6p_1 + 15r = 1$.

   Par ailleurs, les nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. On a donc : $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_4}{p_2}$, c'est-à-dire : $\frac{p_1 + r}{p_1} = \frac{p_1 + 3r}{p_1 + r}$.
   On en tire : $\left(p_1 + r\right)^2 = p_1\left(p_1 + 3r\right)$.
   Soit, en développant : $p_1^2 + 2rp_1 + r^2 = p_1^2 + 3rp_1$.
   On en tire finalement : $r^2 = rp_1$, soit : $r = p_1$.

L'égalité : $6p_1+15r=1$, se récrit alors : $21p_1=1$, soit : $p_1=\frac{1}{21}$.

Comme les p_k sont en progression arithmétique et comme $r=p_1=\frac{1}{21}$, il vient immédiatement :

$$p_k=p_1+(k-1)r=p_1+(k-1)p_1=kp_1=\frac{k}{21}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 1\leq k\leq 6\text{, on a : } p_k=\frac{k}{21}.}$$

2. a) Les issues réalisant l'événement A correspondent aux entiers 2, 4 et 6.
On a donc : $p(A)=p_2+p_4+p_6$, soit, d'après la question précédente :

$$p(A)=p_2+p_4+p_6=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$$\boxed{p(A)=\frac{4}{7}}$$

Les issues réalisant l'événement B correspondent aux entiers : 3, 4, 5 et 6.
On peut aller un peu plus vite en calculant la probabilité de l'événement contraire $\overline{B}$ qui est réalisé par les issues correspondant aux entiers 1 et 2. On a donc :

$$p(\overline{B})=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

On en déduit alors :

$$p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\boxed{p(B)=\frac{6}{7}}$$

On a immédiatement : $p(C)=p_3+p_4=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$.

$$\boxed{p(C)=\frac{1}{3}}$$

b) On cherche, dans cette question : $p(B\,|\,A)$.

Par définition : $p(B\,|\,A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$.

On a : $B\cap A$: « le nombre obtenu est pair et supérieur ou égal à 3 ».
Cet événement est donc réalisé par les issues correspondant aux entiers 4 et 6.

On a donc : $p(B\cap A)=p_4+p_6=\dfrac{4}{21}+\dfrac{6}{21}=\dfrac{10}{21}$.

Il vient alors :

$$p(B\,|\,A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}}=\frac{10}{21}\times\frac{7}{4}=\frac{5}{6}$$

La probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair est égale à $\dfrac{5}{6}$.

c) On a (cf. la question précédente) : $p(B\cap A)=\dfrac{10}{21}$.

Par ailleurs : $p(A)\times p(B)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{24}{49}$.

Comme $\dfrac{24}{49}\neq\dfrac{10}{21}$, c'est-à-dire $p(B\cap A)\neq p(A)\times p(B)$, on en conclut :

Les événements *A* et *B* ne sont pas indépendants.

On a : $A\cap C$: « Le nombre obtenu est pair et égal à 3 ou 4 ». L'événement $A\cap C$ est donc réalisé par la seule issue correspondant au nombre 4.

Il vient donc immédiatement : $p(A\cap C)=\dfrac{4}{21}$.

Par ailleurs : $p(A)\times p(C)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{21}$.

Comme $p(A\cap C)=p(A)\times p(C)$, on peut conclure :

Les événements *A* et *C* sont indépendants.

3. a) On a : $p(G\cap A)=p(G\,|\,A)\times p(A)$.

La probabilité $p(A)$ est connue. Nous allons donc calculer $p(G\,|\,A)$.

On suppose donc l'événement *A* réalisé. Le tirage de la boule s'effectue donc dans l'urne U_1.

Comme cette urne contient 1 boule blanche et 3 boules noires et que les tirages sont équiprobables, il vient :

$$p(G \mid A) = \frac{1}{4}$$

On en déduit alors :

$$p(G \cap A) = p(G \mid A) \times p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{p(G \cap A) = \frac{1}{7}}$$

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. On a donc :

$$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \overline{A})$$

Il nous suffit donc de calculer $p(G \cap \overline{A})$ pour pouvoir conclure.

Nous procédons comme ci-dessus.

Supposons l'événement $\overline{A}$ réalisé. Le tirage de la boule va cette fois s'effectuer dans l'urne U_2.

Comme cette urne contient 2 boules blanches et 1 boule noire et que les tirages sont équiprobables, il vient :

$$p(G \mid \overline{A}) = \frac{2}{3}$$

On en déduit alors :

$$p(G \cap \overline{A}) = p(G \mid \overline{A}) \times p(\overline{A}) = p(G \mid \overline{A}) \times [1 - p(A)] = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

$$p(G \cap \overline{A}) = \frac{2}{7}$$

Il vient finalement :

$$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \overline{A}) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{p(G) = \frac{3}{7}}$$

b) Dans cette question, on suppose que le joueur est gagnant et on cherche $p(A|G)$.

On a : $p(A|G)=\dfrac{p(A\cap G)}{p(G)}$. Toutes les probabilités requises ont été calculées et on obtient :

$$p(A|G)=\frac{p(A\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$$

La probabilité qu'un joueur gagnant ait obtenu un nombre pair est égale à $\dfrac{1}{3}$.