Conditionnement et indépendance

Corrigés d'exercices

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 366 : N°**19**
Page 367 : N°**24**, **27**, **29**, **31**
Page 368 : N°**33**, **36**, **38**
Page 371 : N°**44**
Page 372 : N°**46**
Page 375 : N°**58**

N°19 page 366

On considère les deux événements :

- A : « Le prix du repas est strictement inférieur à 25€ » ;
- B : « Le prix du repas est supérieur ou égal à 15€ ».

a. Calcul de $p(A)$.

Le montant devant être inférieur strictement à 25€, on obtient la probabilité cherchée en additionnant les fréquences correspondant aux classes $[10;15[$, $[15;20[$ et $[20;25[$:

$$p(A)=0,12+0,25+0,36=0,73$$

La probabilité de l'événement A est égale à 0,73.

Calcul de $p(B)$.

On pourrait procéder comme précédemment et additionner les fréquences correspondant aux classes : $[15;20[$, $[20;25[$, $[25;30[$ et $[30;35[$. On peut également raisonner sur l'événement contraire $\overline{B}$: « Le prix du repas est strictement inférieur à 15€ ».
La probabilité de $\overline{B}$ est « simplement » la fréquence associée à la classe $[10;15[$, soit 0,12.

Comme $p(\overline{B})=0,12$, on a : $p(B)=1-p(\overline{B})=1-0,12=0,88$.

La probabilité de l'événement B est égale à 0,88.

Calcul de $p(A\cap B)$.

L'événement $A\cap B$ est réalisé lorsque le montant est supérieur ou égal à 15€ et strictement inférieur à 25€. On obtient ainsi la probabilité cherchée en additionnant les fréquences correspondant aux classes $[15;20[$ et $[20;25[$:

$$p(A\cap B)=0,25+0,36=0,61$$

La probabilité de l'événement $A\cap B$ est égale à 0,61.

b. On cherche maintenant : $p(A\,|\,B)$.

Par définition, on a : $p(A\,|\,B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Avec les valeurs obtenues à la question précédente, il vient :

$$p(A\,|\,B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0,61}{0,88}=\frac{61}{88}$$

La probabilité que l'événement A sachant que B est réalisé est égale à $\dfrac{61}{88}$.

N°24 page 367

1. a) Si $B=\varnothing$ ou si $\overline{B}=\varnothing$, l'égalité est aisément vérifiée.
Supposons donc que l'on ait : $B\neq\varnothing$ et $\overline{B}\neq\varnothing$. Dans ces conditions, *B* et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers et la formule des probabilités totales nous donne immédiatement, pour l'événement *A* :

$$\boxed{p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})}$$

Le résultat est ainsi établi pour toutes les situations.

Remarque : l'hypothèse d'indépendance des événements *A* et *B* est ici inutile.

b) Comme les événements *A* et *B* sont indépendants, on a : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.
L'égalité obtenue à la question précédente se récrit alors :

$$p(A)=p(A)\times p(B)+p(A\cap\overline{B})$$

On en déduit :

$$p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)-p(A)\times p(B)=p(A)\times\left[1-p(B)\right]=p(A)\times p\left(\overline{B}\right)$$

Comme $p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)\times p\left(\overline{B}\right)$, on en déduit finalement :

Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2. Nous procédons comme précédemment mais en tenant compte cette fois du fait que les événements A et B, d'une part, et A et $\overline{B}$, d'autre part, sont indépendants.

   Si $A=\varnothing$ ou si $\overline{A}=\varnothing$, on a facilement : $p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap\overline{A}\right)$.
   Si $A\neq\varnothing$ et si $\overline{A}\neq\varnothing$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers et l'égalité ci-dessus découle de la formule des probabilités totales appliquées à l'événement B.

   L'indépendance des événements A et B nous permet cette fois d'écrire :

$$p\left(B\cap\overline{A}\right)=p(B)-p(B\cap A)=p(B)-p(A)\times p(B)=p(B)\times\left[1-p(A)\right]=p(B)\times p\left(\overline{A}\right)$$

   On en déduit :

Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

   Remarque : dans ce qui précède, les événements A et B jouent des rôles symétriques. A la première question, nous avons en fait établi le résultat général suivant :

   Si deux événements sont indépendants **alors** l'un des événements et le complémentaire de l'autre sont également indépendants.

   On pouvait ainsi immédiatement conclure que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

   Avec $A=\varnothing$ ou si $\overline{A}=\varnothing$, on a, toujours facilement : $p\left(\overline{B}\right)=p\left(\overline{B}\cap A\right)+p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)$.
   Avec $A\neq\varnothing$ et $\overline{A}\neq\varnothing$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers et l'égalité ci-dessus découle de la formule des probabilités totales appliquées à l'événement $\overline{B}$.

   Comme on a vu que les événements A et $\overline{B}$ étaient indépendants, l'égalité ci-dessus donne :

$$p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=p\left(\overline{B}\right)-p\left(\overline{B}\cap A\right)=p\left(\overline{B}\right)-p\left(\overline{B}\right)\times p(A)=p\left(\overline{B}\right)\times\left[1-p(A)\right]=p\left(\overline{B}\right)\times p\left(\overline{A}\right)$$

   On en déduit finalement :

Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque : en s'appuyant sur la remarque précédente et en partant du principe que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants, on pouvait conclure directement.

N°27 page 367

1. Introduisons les événements suivants :
   - P_1 : « On obtient PILE au premier lancé » ;
   - P_2 : « On obtient PILE au second lancé ».

   La pièce de monnaie étant supposée non truquée, on a : $p(P_1) = p(P_2) = \frac{1}{2}$.

   Dans ces conditions, l'événement $(X = 0)$ correspond à l'événement $\overline{P_1} \cap \overline{P_2}$.
   Les événements P_1 et P_2 étant indépendants (l'obtention de PILE au premier lancé ne dépend en rien de l'obtention de PILE au second lancé), il en va de même des événements $\overline{P_1}$ et $\overline{P_2}$ (voir, par exemple, l'exercice précédent).

   On a alors : $p(X = 0) = p\left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

   $$\boxed{p(X = 0) = \frac{1}{4}}$$

   L'événement $(Y = 1)$ correspond à l'événement P_1.

   On a donc immédiatement : $p(Y = 1) = p(P_1) = \frac{1}{2}$.

   $$\boxed{p(Y = 1) = \frac{1}{2}}$$

   Les événements « $Y = 1$ » et « $X = 0$ » sont incompatibles. En effet, si l'événement « $Y = 1$ » est réalisé alors la variable aléatoire X prendra soit la valeur 1 (on obtient FACE au second lancé) soit la valeur 2 (on obtient PILE au second lancé). On a donc : $(X = 0) \cap (Y = 1) = \varnothing$ et, immédiatement :

   $$\boxed{p\left((X = 0) \cap (Y = 1)\right) = 0}$$

2. Introduisons les événements suivants :

   Si les variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, on aurait :

   $$p\left((X = 0) \cap (Y = 1)\right) = p(X = 0) \times p(Y = 1)$$

Comme $p\left(\left(X=0\right)\cap\left(Y=1\right)\right)=0$ et $p\left(X=0\right)\times p\left(Y=1\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$, on a donc ici :

$$p\left(\left(X=0\right)\cap\left(Y=1\right)\right)\neq p\left(X=0\right)\times p\left(Y=1\right)$$

On en déduit finalement :

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

N°29 page 367

En guise de préambule, notons :

- B l'événement « Obtenir un jeton blanc » ;
- U_1 l'événement « Le jeton a été tiré dans l'urne U_1 » ;
- U_2 l'événement « Le jeton a été tiré dans l'urne U_2 ».

a. Puisque l'urne U_1 contient 5 jetons blancs pour un total de 12 jetons, on a :

$$\boxed{p\left(B\,|\,\mathrm{U}_1\right)=\frac{5}{12}}$$

b. En raisonnant de façon analogue, on obtient immédiatement :

$$\boxed{p\left(B\,|\,\mathrm{U}_2\right)=\frac{5}{8}}$$

c. Puisque l'on tire un jeton soit dans l'urne U_1, soit dans l'urne U_2 et qu'on ne peut tirer le jeton dans les deux à la fois (!) on peut affirmer que les événements U_1 et U_2 forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales appliquées à l'événement B s'écrit :

$$p\left(B\right)=p\left(B\cap\mathrm{U}_1\right)+p\left(B\cap\mathrm{U}_2\right)=p\left(B\,|\,\mathrm{U}_1\right)\times p\left(\mathrm{U}_1\right)+p\left(B\,|\,\mathrm{U}_2\right)\times p\left(\mathrm{U}_2\right)$$

Les urnes étant indiscernables, il vient : $p\left(\mathrm{U}_1\right)=p\left(\mathrm{U}_2\right)=\frac{1}{2}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \mid \mathrm{U}_1) \times p(\mathrm{U}_1) + p(B \mid \mathrm{U}_2) \times p(\mathrm{U}_2) \\ &= \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{24} \times \frac{1}{2} \times (2+3) \\ &= \frac{25}{48} \end{aligned}$$

La probabilité que le jeton tiré soit blanc vaut $\frac{25}{48}$.

N°31 page 367

Introduisons les événements :

- V : « Le client achète la veste de ce modèle » ;
- P : « Le client achète le pantalon de ce modèle ».

D'après l'énoncé, on a :

- $p(V) = 0,2$;
- $p(P \mid V) = 0,7$;
- $p(P \mid \bar{V}) = 0,1$.

a. On cherche ici $p(P \cap V)$. Les deux premières probabilités ci-dessus vont nous permettre de répondre. En effet, on a : $p(P \mid V) = \frac{p(P \cap V)}{p(V)}$. Il vient alors :

$$p(P \cap V) = p(P \mid V) \times p(V) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$$

La probabilité que le client achète l'ensemble pantalon + veste est bien égale à 0,14.

b. On cherche ici $p(P)$.

Les événements V et $\bar{V}$ forment une partition de l'univers en tant qu'événements complémentaires de probabilités non nulles.

On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(P) = p(P \cap V) + p(P \cap \bar{V}) = p(P \mid V) \times p(V) + p(P \mid \bar{V}) \times p(\bar{V})$$

Toutes les probabilités requises sont connues sauf $p(\bar{V})$.

Mais on a simplement : $p\left(\overline{V}\right)=1-p\left(V\right)$.

D'où :

$$\begin{aligned}p\left(P\right)&=p\left(P\cap V\right)+p\left(P\,|\,\overline{V}\right)\times p\left(\overline{V}\right)\\&=p\left(P\cap V\right)+p\left(P\,|\,\overline{V}\right)\times\left(1-p\left(V\right)\right)\\&=0,14+0,1\times\left(1-0,2\right)\\&=0,14+0,08\\&=0,22\end{aligned}$$

La probabilité que le client achète le pantalon est égale à 0,22.

c. On cherche ici $p\left(P\cup V\right)$.

On a : $p\left(P\cup V\right)=p\left(P\right)+p\left(V\right)-p\left(P\cap V\right)$.

Toutes les probabilités requises sont connues. Il vient :

$$\begin{aligned}p\left(P\cup V\right)&=p\left(P\right)+p\left(V\right)-p\left(P\cap V\right)\\&=0,22+0,2-0,14\\&=0,28\end{aligned}$$

La probabilité que le client achète la veste ou le pantalon est égale à 0,28.

d. Si le client :

- Achète la veste et le pantalon, on a : $X=190+80=270$. Cette situation correspond à l'événement : $P\cap V$. Or, d'après la question a), on a : $p\left(P\cap V\right)=0,14$. On en déduit immédiatement : $p\left(X=270\right)=0,14$;
- Achète le pantalon mais pas la veste, on a : $X=80$. Cette situation correspond à l'événement : $P\cap\overline{V}$.
  Or, d'après la question b), on a : $p\left(P\right)=p\left(P\cap V\right)+p\left(P\cap\overline{V}\right)=0,22$.
  Il vient alors : $p\left(P\cap\overline{V}\right)=p\left(P\right)-p\left(P\cap V\right)=0,22-0,14=0,08$;

1. Achète la veste mais pas le pantalon, on a : $X=190$. Cette situation correspond à l'événement : $\overline{P}\cap V$.
   Or, les événements P et $\overline{P}$ formant une partition de l'univers, on a : $p\left(V\right)=p\left(V\cap P\right)+p\left(V\cap\overline{P}\right)$.
   Il vient alors : $p\left(V\cap\overline{P}\right)=p\left(V\right)-p\left(V\cap P\right)=0,2-0,14=0,06$:
2. N'achète ni le pantalon, ni la veste, on a : $X=0$. Cette situation correspond à l'événement : $\overline{P}\cap\overline{V}$.

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{P}\cap\overline{V}\right) &= 1-\left[p\left(\overline{P}\cap V\right)+p\left(P\cap\overline{V}\right)+p\left(P\cap V\right)\right] \\ &= 1-\left(0,14+0,08+0,06\right) \\ &= 1-0,28 \\ &= 0,72 \end{aligned}$$

Finalement, la loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est donnée par :

k	0	80	190	270
$p\left(X=k\right)$	0,72	0,08	0,06	0,14

N°33 page 368

D'après l'énoncé, on a :

- $p\left(F\right)=95\%=0,95$;
- $p_F\left(T\right)=96\%=0,96$;
- $p_{\overline{F}}\left(T\right)=8\%=0,08$.

1. a) On cherche ici $p\left(\overline{T}\cap F\right)$.

   On a :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{T}\cap F\right) &= p_F\left(\overline{T}\right)\times p\left(F\right)=\left[1-p_F\left(T\right)\right]\times p\left(F\right) \\ &= \left(1-0,96\right)\times 0,95 \\ &= 0,038 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du teste et qu'il soit en état de fonctionnement est égale à 0,038 (soit 3,8%).

b) On cherche cette fois : $p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right) &= p_{\overline{F}}\left(\overline{T}\right)\times p\left(\overline{F}\right)=\left[1-p_{\overline{F}}\left(T\right)\right]\times\left[1-p\left(F\right)\right] \\ &= \left(1-0,08\right)\times\left(1-0,95\right) \\ &= 0,92\times 0,05 \\ &= 0,046 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du teste et qu'il ne soit en état de fonctionnement est égale à 0,046 (soit 4,6%).

c) On cherche ici $p\left(\overline{T}\right)$.

On a : $p\left(\overline{T}\right)=p\left(\overline{T}\cap F\right)+p\left(\overline{T}\cap \overline{F}\right)$. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, il vient alors :

$$p\left(\overline{T}\right)=p\left(\overline{T}\cap F\right)+p\left(\overline{T}\cap \overline{F}\right)=0,038+0,046=0,084$$

La probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du teste est égale à 0,084 (soit 8,4%).

2. On cherche ici $p_{\overline{T}}\left(F\right)$.

On a : $p_{\overline{T}}\left(F\right)=\dfrac{p\left(\overline{T}\cap F\right)}{p\left(\overline{T}\right)}$. A l'aide des questions 1.a) et 1.c), il vient :

$$p_{\overline{T}}\left(F\right)=\frac{p\left(\overline{T}\cap F\right)}{p\left(\overline{T}\right)}=\frac{0,038}{0,084}=\frac{38}{84}=\frac{19}{42}\simeq 0,452$$

La probabilité qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il a été refusé à l'issue du test est égale à $\dfrac{19}{42}$ soit, à 10^{-3} près, 0,452 (soit 45,2%).

Ce résultat mérite un petit commentaire.
Près d'un téléviseur sur deux refusé à l'issue du test est en fait en état de fonctionnement ! Dans ces conditions, on ne peut pas dire que le test soit d'une grande valeur (cf. l'activité 4 p363) …

N°36 page 368

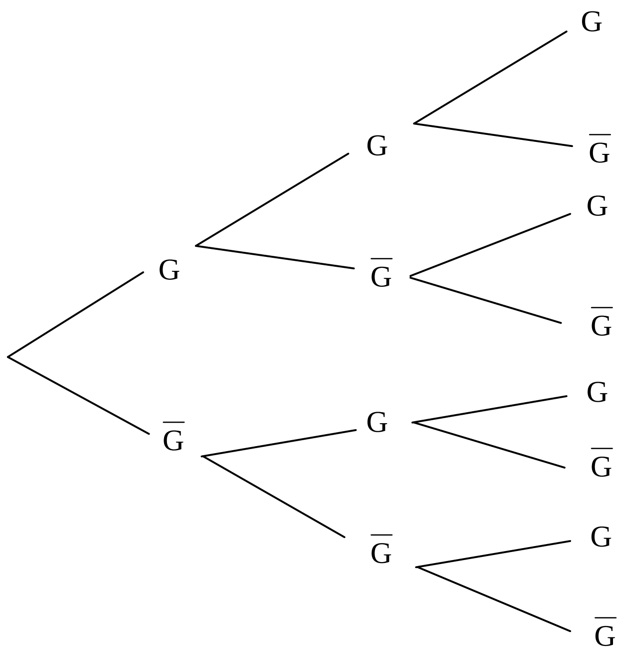
Probabilité pour qu'un nouveau-né soit un garçon : 0,51.

Deux naissances différentes sont considérées comme des événements indépendants.

1. Cas de trois naissances

On considère donc ici une liste de trois naissances, chaque naissance étant indépendante des deux autres.

Si on note G l'événement « Obtenir un garçon » pour une naissance donnée, on peut s'aider de la représentation de la page suivante (arbre).



a. Soit l'événement A : « Il ne naît aucun garçon ».

Cet événement correspond à la liste $\overline{\text{G}}\overline{\text{G}}\overline{\text{G}}$.
On a donc : $p(\text{A}) = p\left(\overline{\text{G}}\right)\times p\left(\overline{\text{G}}\right)\times p\left(\overline{\text{G}}\right) = p\left(\overline{\text{G}}\right)^3 = \left(1-p(\text{G})\right)^3 = 0,49^3 = 0,117649$

La probabilité qu'il ne naisse aucun garçon est environ égale à 0,118 (valeur arrondie à 10^{-3} près).

b. Soit l'événement B : « il naît un et un seul garçon ».

Cet événement correspond aux trois listes suivantes : $\text{G}\overline{\text{G}}\overline{\text{G}}$, $\overline{\text{G}}\text{G}\overline{\text{G}}$ et $\overline{\text{G}}\overline{\text{G}}\text{G}$.
(le garçon naît en première, deuxième ou troisième position).

Chacune de ces issues a la probabilité $0,51\times 0,49^2$ de se réaliser.
On en déduit : $p(\text{B}) = 3\times 0,51\times 0,49^2 = 0,367353$.

La probabilité qu'il naisse exactement un garçon est environ égale à 0,367 (valeur arrondie à 10^{-3} près).

c. Soit l'événement C : « il naît au moins un garçon ».

Cet événement est l'événement contraire de l'événement A.

On a donc : $p(\mathrm{C}) = p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}117649 = 0{,}882351$.

La probabilité qu'il naisse au moins un garçon est environ égale à 0,882 (valeur arrondie à 10^{-3} près).

2. <u>Cas de *n* naissances (*n* entier strictement positif)</u>

Cette question vise à généraliser la situation précédente et les résultats obtenus.

a. Soit l'événement C_n : « Il naît au moins un garçon ».
Comme dans le c de la question précédente, nous allons utiliser le fait que cet événement l'événement contraire de l'événement A_n : « il ne naît aucun garçon ».

L'événement A_n correspond à la liste : $\underbrace{\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{G}}...\overline{\mathrm{G}}}_{n \text{ fois}}$. Chaque événement de cette liste ayant une probabilité de se réaliser égale à 0,49 on peut écrire :

$$p(\mathrm{A}_n) = p(\overline{\mathrm{G}})^n = (1 - p(\mathrm{G}))^n = 0{,}49^n$$

Comme : $p(\mathrm{C}_n) = 1 - p(\mathrm{A}_n)$, on obtient : $\boxed{p(\mathrm{C}_n) = 1 - 0{,}49^n}$

b. On cherche ici le nombre minimum de naissances à envisager pour que la probabilité qu'il naisse au moins un garçon soit supérieure à 0,99.

Il convient donc de résoudre l'équation : $p(\mathrm{C}_n) > 0{,}99$, c'est à dire, d'après la question précédente : $1 - 0{,}49^n > 0{,}99$.

Nous pouvons récrire cette inégalité comme suit : $0{,}49^n < 0{,}01$

Chaque membre de cette inéquation étant strictement positif, on a :

$$0{,}49^n < 0{,}01 \Leftrightarrow \ln\left(0{,}49^n\right) < \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n\ln 0{,}49 < \ln 10^{-2} \Leftrightarrow n\ln 0{,}49 < -2\times\ln 10$$

En tenant compte du fait que $\ln 0{,}49$ est strictement négatif, on a finalement :

$$0{,}49^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n\ln 0{,}49 < -2\times\ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{-2\times\ln 10}{\ln 0{,}49}$$

Comme $\dfrac{-2\times\ln 10}{\ln 0{,}49} \simeq 6{,}46$ (à 10^{-2} près), on en déduit finalement que le plus petit entier *n* tel que la probabilité $p(\mathrm{C}_n)$ soit strictement supérieure à 0,99 vaut 7.

A partir de 7 naissances, la probabilité d'obtenir au moins un garçon est donc supérieure à 0,99.

N°38 page 368

a) Il y a un total de $9+6+5=20$ jouets dans la caisse. Le nombre de façons de choisir 3 jouets parmi ces 20 jouets est égal à :

$$\binom{20}{3}=\frac{20!}{3!\times 17!}=\frac{20\times 19\times 18}{3\times 2}=20\times 19\times 3=1140$$

Pour que l'événement A soit réalisé, il convient que Rémi ait :

- choisi exactement un jouet rouge : 9 possibilités.
- choisi exactement un jouet jaune : 6 possibilités.
- choisi exactement un jouet bleu : 5 possibilités.

Il y a donc un total de : $9\times 6\times 5=270$ choix conduisant à la réalisation de A.

Les tirages de 3 jouets étant équiprobables, la probabilité de A vaut alors :

$$p(\mathrm{A})=\frac{270}{1140}=\frac{9\times 6\times 5}{20\times 19\times 3}=\frac{\cancel{3}\times 3\times \cancel{2}\times 3\times \cancel{5}}{\cancel{2}\times 2\times \cancel{5}\times 19\times \cancel{3}}=\frac{9}{38}$$

On a bien :

$$\boxed{p(\mathrm{A})=\frac{9}{38}}$$

b) Considérons les événements :

- BR : « Rémi a choisi 3 jouets rouges ».
- BJ : « Rémi a choisi 3 jouets jaunes ».
- BB : « Rémi a choisi 3 jouets bleus ».

Ces événements sont deux à deux incompatibles et on a :

$$p(\mathrm{B})=p(\mathrm{BR})+p(\mathrm{BJ})+p(\mathrm{BB})$$

Pour que l'événement BR soit réalisé, il convient que Rémi ait choisi 3 jouets rouges parmi les 9 disponibles : $\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\times 6!}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}=\frac{\cancel{3}\times 3\times \cancel{2}\times 4\times 7}{\cancel{3}\times \cancel{2}}=84$.

Alors : $p(\mathrm{BR})=\frac{84}{1140}=\frac{12\times 7}{12\times 95}=\frac{7}{95}$.

De façon similaire :

$$p(\mathrm{BJ})=\frac{\binom{6}{3}}{1140}=\frac{\frac{6!}{3!\times 3!}}{1140}=\frac{\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2}}{1140}=\frac{20}{1140}=\frac{1}{57}$$

$$p(\text{BB})=\frac{\binom{5}{3}}{1140}=\frac{\frac{5!}{3!\times 2!}}{1140}=\frac{\frac{5\times 4}{2}}{1140}=\frac{10}{1140}=\frac{1}{114}$$

D'où :

$$\begin{aligned}p(\text{B})&=p(\text{BR})+p(\text{BJ})+p(\text{BB})\\&=\frac{7}{95}+\frac{1}{57}+\frac{1}{114}=\frac{7\times 6+10+5}{570}=\frac{57}{570}\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

$$\boxed{p(\text{B})=\frac{1}{10}}$$

c) Pour que l'événement C soit réalisé, il convient que Rémi ait :

- choisi exactement 2 jouets rouges parmi les 9 : $\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\times 7!}=\frac{9\times 8}{2}=36$ possibilités.
- choisi exactement un jouet parmi les 11 jouets non rouges : 11 possibilités.

Il y a donc un total de : $36\times 11=396$ choix conduisant à la réalisation de C.

La probabilité de C vaut alors :

$$p(\text{C})=\frac{396}{1140}=\frac{\cancel{12}\times 33}{\cancel{12}\times 95}=\frac{33}{95}$$

$$\boxed{p(\text{C})=\frac{33}{95}}$$

N°44 page 371

1. On a déjà : $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$.

   On nous précise que les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$ sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétiques de raison *r*. On peut donc écrire :

   $$p_2=p_1+r\ ,\ p_3=p_1+2r\ ,\ p_4=p_1+3r\ ,\ p_5=p_1+4r\ \text{ et }\ p_6=p_1+5r$$

   L'égalité : $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ se récrit alors :

   $$p_1+(p_1+r)+(p_1+2r)+(p_1+3r)+(p_1+4r)+(p_1+5r)=1$$

Soit : $6p_1 + r(1+2+3+4+5) = 1$.

Soit enfin : $6p_1 + 15r = 1$.

Par ailleurs, les nombres p_1, p_2, p_4 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. On a donc : $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{p_4}{p_2}$, c'est-à-dire : $\dfrac{p_1 + r}{p_1} = \dfrac{p_1 + 3r}{p_1 + r}$.
On en tire : $(p_1 + r)^2 = p_1(p_1 + 3r)$. Soit, en développant : $p_1^2 + 2rp_1 + r^2 = p_1^2 + 3rp_1$.
On en tire finalement : $r^2 = rp_1$, soit : $r = p_1$.

L'égalité : $6p_1 + 15r = 1$, se récrit alors : $21p_1 = 1$, soit : $p_1 = \dfrac{1}{21}$.
Comme les p_k sont en progression arithmétique et comme $r = p_1 = \dfrac{1}{21}$, il vient immédiatement :

$$p_k = p_1 + (k-1)r = p_1 + (k-1)p_1 = kp_1 = \frac{k}{21}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 1 \leq k \leq 6 \text{, on a : } p_k = \frac{k}{21}.}$$

2. a) Les issues réalisant l'événement A correspondent aux entiers 2, 4 et 6.
On a donc : $p(A) = p_2 + p_4 + p_6$, soit, d'après la question précédente :

$$p(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{p(A) = \frac{4}{7}}$$

Les issues réalisant l'événement B correspondent aux entiers : 3, 4, 5 et 6.
On peut aller un peu plus vite en calculant la probabilité de l'événement contraire $\overline{B}$ qui est réalisé par les issues correspondant aux entiers 1 et 2. On a donc :

$$p(\overline{B}) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

On en déduit alors :

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{6}{7}}$$

On a immédiatement : $p(C)=p_3+p_4=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$.

$$\boxed{p(C)=\frac{1}{3}}$$

b) On cherche, dans cette question : $p(B\,|\,A)$.

Par définition : $p(B\,|\,A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}$.

On a : $B\cap A$: « le nombre obtenu est pair et supérieur ou égal à 3 ».
Cet événement est donc réalisé par les issues correspondant aux entiers 4 et 6.

On a donc : $p(B\cap A)=p_4+p_6=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{10}{21}$.

Il vient alors :

$$p(B\,|\,A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}}=\frac{10}{21}\times\frac{7}{4}=\frac{5}{6}$$

La probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair est égale à $\frac{5}{6}$.

c) On a (cf. la question précédente) : $p(B\cap A)=\frac{10}{21}$.

Par ailleurs : $p(A)\times p(B)=\frac{4}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{24}{49}$.

Comme $\frac{24}{49}\neq\frac{10}{21}$, c'est-à-dire $p(B\cap A)\neq p(A)\times p(B)$, on en conclut :

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

On a : $A\cap C$: « Le nombre obtenu est pair et égal à 3 ou 4 ». L'événement $A\cap C$ est donc réalisé par la seule issue correspondant au nombre 4.

Il vient donc immédiatement : $p(A\cap C)=\frac{4}{21}$.

Par ailleurs : $p(A)\times p(C)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{21}$.

Comme $p(A\cap C)=p(A)\times p(C)$, on peut conclure :

Les événements A et C sont indépendants.

3. a) On a : $p(G \cap A) = p(G \mid A) \times p(A)$.

La probabilité $p(A)$ est connue. Nous allons donc calculer $p(G \mid A)$.
On suppose donc l'événement *A* réalisé. Le tirage de la boule s'effectue donc dans l'urne U_1.
Comme cette urne contient 1 boule blanche et 3 boules noires et que les tirages sont équiprobables, il vient :

$$p(G \mid A) = \frac{1}{4}$$

On en déduit alors :

$$p(G \cap A) = p(G \mid A) \times p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{p(G \cap A) = \frac{1}{7}}$$

Les événements *A* et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. On a donc :

$$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \overline{A})$$

Il nous suffit donc de calculer $p(G \cap \overline{A})$ pour pouvoir conclure.
Nous procédons comme ci-dessus.
Supposons l'événement $\overline{A}$ réalisé. Le tirage de la boule va cette fois s'effectuer dans l'urne U_2.

Comme cette urne contient 2 boules blanches et 1 boule noire et que les tirages sont équiprobables, il vient :

$$p(G \mid \overline{A}) = \frac{2}{3}$$

On en déduit alors :

$$p(G \cap \overline{A}) = p(G \mid \overline{A}) \times p(\overline{A}) = p(G \mid \overline{A}) \times \left[1 - p(A)\right] = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

Il vient finalement :

$$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \overline{A}) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{p(G) = \frac{3}{7}}$$

b) Dans cette question, on suppose que le joueur est gagnant et on cherche $p(A|G)$.

On a : $p(A|G)=\dfrac{p(A\cap G)}{p(G)}$. Toutes les probabilités requises ont été calculées et on obtient :

$$p(A|G)=\frac{p(A\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$$

La probabilité qu'un joueur gagnant ait obtenu un nombre pair est égale à $\dfrac{1}{3}$.

N°46 page 372

On peut considérer l'expérience aléatoire consistant à « choisir » la couleur d'un feu donné. Il y a trois issues possibles : VERT (notée « V »), ORANGE (notée « O ») et ROUGE (notée (R ») de probabilités respectives $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$.
Puisque le livreur va rencontrer deux feux sur son trajet, on peut considérer une nouvelle expérience aléatoire consistant en la répétition de l'expérience décrite ci-dessus. Une issue de cette nouvelle expérience aléatoire sera notée à l'aide de deux lettres : VO par exemple.
Les issues possibles sont : VV, VO, VR, OV, OO, OR, RV, RO et RR et puisque les fonctionnements des feux sont indépendants, les probabilités associées sont respectivement :

- $p(\text{VV})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$;
- $p(\text{VO})=p(\text{VR})=p(\text{OV})=p(\text{RV})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$;
- $p(\text{OO})=p(\text{OR})=p(\text{RO})=p(\text{RR})=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$.

1. a. Puisque la distance à parcourir est égale à 6km et que la vitesse du scooter est supposée constante égale à 36km/h, le temps passé à rouler est exactement égal à $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}\text{h}=10\text{mn}$.

   Pour atteindre une durée totale de $11\text{mn}=10\text{mn}+1\text{mn}$, il y a deux possibilités :

   - Le livreur est arrivé à un feu orange et un feu vert : OV et VO.
   - Le livreur est arrivé à deux feux rouges : RR.

   On a donc : $p(\text{X}=11)=p(\text{OV})+p(\text{VO})+p(\text{RR})=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

$$\boxed{p(\text{X}=11)=\frac{5}{16}}$$

b. Les valeurs possibles de X sont (en minutes) : 10 (pas d'attente : deux feux verts), 10,5 (30 secondes d'attente : un feu vert et un feu rouge), 11 (une minutes d'attente, voir ci-dessus), 11,5 (1 minute et 30 secondes d'attente : un feu orange et un feu rouge) et 12 (2 minutes d'attente : deux feux orange).

Nous pouvons donc fournir le tableau suivant :

Valeur de X : x	Issues correspondantes	$p(\mathrm{X}=x)$
10	VV	$\frac{1}{4}$
10,5	VR, RV	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$
11	OV, VO, RR	$\frac{5}{16}$
11,5	OR, RO	$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$
12	OO	$\frac{1}{16}$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc donnée par le tableau suivant :

x	10	10,5	11	11,5	12
$p(\mathrm{X}=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2. A partir du tableau précédent, on a facilement l'espérance mathématique de X, exprimée en minutes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= 10\times\frac{1}{4}+10,5\times\frac{1}{4}+11\times\frac{5}{16}+11,5\times\frac{1}{8}+12\times\frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{16}(10\times 4+10,5\times 4+11\times 5+11,5\times 2+12) \\
&= \frac{1}{16}(40+42+55+23+12) \\
&= \frac{172}{16} \\
&= \frac{43}{4}
\end{aligned}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égale à $\frac{43}{4}$ mn, soit $10,75\text{mn}=10\text{mn}\,45\text{s}$.

3. a. Comme 11 minutes séparent 10h49 de 20h00, le livreur arrivera en retard si X prend une valeur strictement supérieure à 11. On cherche donc ici : $p(\mathrm{X}>11)$.

   D'après la loi de probabilité de X, on a :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X}>11) &= p(\mathrm{X}=11{,}5)+p(\mathrm{X}=12) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{16} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

La probabilité que le livreur arrive en retard est égale à $\frac{3}{16}$.

   b. Le livreur arrivera en retard si X prend une valeur strictement inférieure à 11. On cherche donc ici : $p(\mathrm{X}<11)$.

   D'après la loi de probabilité de X, on a :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X}<11) &= p(\mathrm{X}=10)+p(\mathrm{X}=11{,}5) \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La probabilité que le livreur arrive en retard est égale à $\frac{1}{2}$.

N°58 page 375

1. a. D'après l'énoncé (première donnée), on a : $p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})=0{,}8$ et (deuxième donnée) : $p_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})=0{,}6$.

$p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})=0{,}8$ et $p_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})=0{,}6$.

   b. On a : $p(\mathrm{A}_{n+1}\cap\mathrm{A}_n)=p_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})\times p(\mathrm{A}_n)=0{,}8\times p(\mathrm{A}_n)$ et, de façon similaire : $p\left(\mathrm{A}_{n+1}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\right)=p_{\overline{\mathrm{A}_n}}(\mathrm{A}_{n+1})\times p\left(\overline{\mathrm{A}_n}\right)=0{,}6\times\left[1-p(\mathrm{A}_n)\right]$.

$p(\mathrm{A}_{n+1}\cap\mathrm{A}_n)=0{,}8\times p(\mathrm{A}_n)$ et $p\left(\mathrm{A}_{n+1}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\right)=0{,}6\times\left[1-p(\mathrm{A}_n)\right]$.

c. On a, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A}_{n+1}) &= p(\mathrm{A}_{n+1} \cap \mathrm{A}_n) + p\left(\mathrm{A}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{A}_n}\right) \\ &= 0,8 \times p(\mathrm{A}_n) + 0,6 \times \left[1 - p(\mathrm{A}_n)\right] \\ &= 0,6 + 0,2\,p(\mathrm{A}_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(\mathrm{A}_{n+1}) = 0,6 + 0,2\,p(\mathrm{A}_n)}$$

2. a. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,75 \\ &= p(\mathrm{A}_{n+1}) - 0,75 \\ &= 0,6 + 0,2\,p(\mathrm{A}_n) - 0,75 \\ &= 0,2\,p(\mathrm{A}_n) - 0,15 \\ &= 0,2\left[p(\mathrm{A}_n) - \frac{0,15}{0,2}\right] \\ &= 0,2\left[p(\mathrm{A}_n) - \frac{3}{4}\right] \\ &= 0,2\left[p(\mathrm{A}_n) - 0,75\right] \\ &= 0,2\left(p_n - 0,75\right) \\ &= 0,2u_n \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit immédiatement que } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison 0,2.}}$

b. On a : $u_1 = p_1 - 0,75 = p(\mathrm{A}_1) - 0,75 = 0,7 - 0,75 = -0,05$.

La suite (u_n) étant géométrique de raison 0,2 il vient alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$u_n = u_1 \times 0,2^{n-1} = -\frac{0,05}{0,2} \times 0,2^n = -\frac{1}{4} \times 0,2^n$$

Puis :

$$p_n = u_n + 0,75 = -\frac{1}{4} \times 0,2^n + 0,75$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 0,75 - \frac{1}{4} \times 0,2^n}$$

c. Comme la raison de la suite géométrique (u_n) est strictement comprise entre -1 et 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On en déduit immédiatement (addition) :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \left(u_n + 0,75\right) = 0 + 0,75 = 0,75$$

La suite (u_n) est convergente de limite 0,75.