Lycée Fénelon Sainte-Marie		Terminale ES
Année 2012-2013		Mathématiques
Mardi 19 Mars 2013	Durée : 3 heures	DTL N°4

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 4 exercices.
Le barème est fourni à titre indicatif.

EXERCICE 1 *(6 points)*

Une boite contient deux dés : un dé rose cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé vert dont deux faces portent le numéro 6 et les autres le numéro 2.
On choisit un dé au hasard dans la boite, puis on lance ce dé. Le dé rose a deux fois plus de chance d'être choisi que le dé vert.
On note :

- R l'événement « le dé est rose »
- S l'événement « on obtient 6 au lancer du dé »

1. a. Décrire la situation par un arbre pondéré
b. Calculer la probabilité d'avoir choisi le dé rose et obtenu un six.
c. Calculer la probabilité d'obtenir un six quel que soit le dé choisi.
d. On a obtenu un six. Calculer la probabilité que le dé soit vert.

2. On relance le dé choisi une deuxième fois.
a. Prolonger l'arbre précédent.
b. Calculer la probabilité d'avoir choisi le dé rose et d'avoir obtenu deux fois le six.
c. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois le six quel que soit le dé choisi.
d. Sachant qu'on a obtenu deux fois le six, calculer la probabilité que le dé soit vert.

3. On relance n fois le dé choisi.
Montrer que la probabilité d'obtenir n fois un six est :

$$p_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4. a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir le dé vert sachant qu'on a obtenu n fois un six.
b. Montrer que la probabilité d'obtenir le dé vert et n fois un six est :

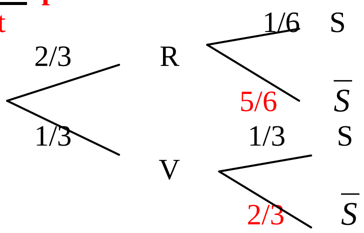
$$q_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c. Déterminer par un calcul, la plus petite valeur de n telle que $q_n \leq 0{,}001$.

Correction

Exercice 1: 6pt

1. a. 0.5pt



1.b. $p(R\cap S)=p(R)\times p_R(S)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$ 0.5pt

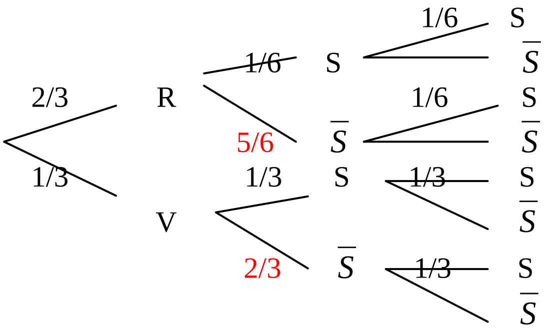
1.c. Les événements R et V forment une partition de l'univers, P(S) est une probabilité totale .

$$p(S)=p(R\cap S)+p(V\cap S)$$

$$p(S)=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$ 0.5pt

1. d. $p_S(V)=\frac{p(S\cap V)}{p(S)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}$ 0.5pt

2.a. 0.5pt



2.b. La probabilité d'avoir choisi le dé rose et d'avoir obtenu deux fois le six.

$$p(R\cap S\cap S)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$$ 0.5pt

2.c . La probabilité d'obtenir deux fois le six quel que soit le dé choisi.

$$p(2S)=p(R\cap S\cap S)+p(V\cap S\cap S)$$

$$p(2S)=\frac{1}{54}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}.$$ 0.5pt

2.d. Sachant qu'on a obtenu deux fois le six, calculer la probabilité que le dé soit vert.

$$p_{2S}(V)=\frac{p(S\cap S\cap V)}{p(2S)}=\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{18}}=\frac{2}{3}.$$ 0.5pt

3. La probabilité d'obtenir n fois un six.

$$p_n=p(R\cap S\cap S...\cap S)+p(V\cap S\cap S....\cap S)$$

$$p_n=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times....\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times....\times\frac{1}{3}\right)$$ 0.5pt

$$p_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4.a. La probabilité d'obtenir le dé vert sachant qu'on a obtenu n fois un six.

$$p_{nS}\left(V\right)=\frac{p\left(V\cap S\cap S....\cap S\right)}{p\left(nS\right)}=\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$$ 0.5pt

$$p_{nS}\left(V\right)=\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2\times3}\right)^{n}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+1}$$

4.b. La probabilité d'obtenir le dé vert et n fois un six

$$q_n=p\left(V\cap S\cap S.....\cap S\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$ 0.5pt

4.c. Résoudre $q_n\leq 0,001$ 0.5pt

$$q_n\leq 0,001\Leftrightarrow\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\leq 0,001$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\leq 0,001\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\leq 0,003$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\leq 0,001\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{3}\right)\leq\ln 0,003$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\leq 0,001\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 0,003}{-\ln 3}$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\leq 0,001\Leftrightarrow n\geq 5,28$$

Donc n = 6

EXERCICE 2 *(4 points)*

Sur une portion de 6 kilomètres de boulevard périphérique parisien, le trafic peut être perturbé entre 7h et 11h du matin.

Au début de cette portion, un panneau lumineux indique à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.

On modélise l'évolution du trafic à l'aide d'une fonction *f* définie sur [1 ; 5] par :

$$f\left(t\right)=8\times\mathrm{e}\times\frac{\ln t}{t}+4\ .$$

Le nombre *f*(t) est le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure.

Il est 7h du matin à l'instant t = 1.

Le panneau indique « trafic fluide »s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres et « perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

1. a. Etudier les variations de f sur [1 ; 5] et dresser son tableau de variations.

b. En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7h 10min et qu'il ne l'est plus jusqu'à 11h.

2. Soit *g* la fonction définie sur [1 ; 5] par :

$$g(t)=(\ln t)^2$$

a. Calculer $g'(t)$ et en déduire une primitive de f sur [1 ; 5]

b. Calculer, à une minute près, la valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 km entre 7h et 11h du matin.

Correction : exercice 2 (4points)

$$f(t)=8\times e\times\frac{\ln t}{t}+4 \text{ avec } D_f=[1;5]$$

1.a. Dérivée de la fonction f

$$f'(t)=8e\times\left(\frac{\frac{1}{t}\times t-1\times\ln t}{t^2}\right) \text{ ; donc } f'(t)=8e\times\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) \quad 0.5pt$$

Pour étudier le signe de $f'(t)$ on étudie le signe de $1-\ln t$

Or $1-\ln t>0$ ssi $1>\ln t$ d'où $e>t$

Si $1\le t\le e$ alors $f'(t)\ge 0$ et f est strictement croissante

Si $e\le t$ alors $f'(t)\le 0$ et f est strictement décroissante 0.5pt

t	1		e		5
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	4	↗	12	↘	$f(5)$

$$f(5)=8e\frac{\ln 5}{5}+4 \text{ et } f(5)\simeq 11 \quad 0.25pt \quad \text{tableau}$$

1.b. il faut résoudre l'inéquation $f(t)\ge 6$. 1pt

f est une fct continue et strictement croissante sur [1 ;e] et $6\in[4\,;12]$d'après TVI l'équation $f(t)=6$ a une unique solution α.

Sur l'intervalle [e ; 5] ; l'équation $f(t)=6$ n'a pas de sol.

Avec la calculatrice :$\alpha\approx 1{,}11$ soit $t\approx$ 7h06min donc la circulation n'est pas fluide se 7h10min à 11h.

2. $g(t)=(\ln t)^2$ et $D_g=[1;5]$

2.a. Dérivons la fonction g

$$g'(t)=2\times\frac{1}{t}\times(\ln t)=2\times\frac{\ln t}{t} \quad 0.5pt$$

Déterminons une primitive F de f

$$f(t)=8\times e\times\frac{\ln t}{t}+4=4e\times\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)+4$$

$$F(t)=4e\times(\ln t)^2+4t+0 \quad 0.5pt$$

2.b. La valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 km, entre 7h et 11h du matin.

$$m=\frac{1}{5-1}\int_1^5 f(t)dt \quad 0.25pt$$

$$m=\frac{1}{4}\left[4e\times(\ln t)^2+4t\right]_1^5$$

$$m=\frac{1}{4}\left[4e\times(\ln 5)^2+4\times 5\right]-\frac{1}{4}\left[4e\times\ln 1+4\times 1\right]$$

$$m=\frac{1}{4}\left(4e(\ln 5)^2+16\right)$$

$m\approx 11{,}04$ En moyenne, entre 7h et 11h , les automobilistes mettent 11min24sec. 0.5pt

EXERCICE 3 *(6 points)*
Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 25] par

$$f(x) = 18\ln x - x^2 + 16x - 15.$$

Si x représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que $f(x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.
On suppose que f est dérivable sur [0,5 ; 25], et on note f' sa fonction dérivée.

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$.
Vérifier que, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle [0,5 ; 25], on a

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 25]. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 25].

3. a. Calculer $f(1)$.
b. Montrer que sur l'intervalle [18 ; 19] l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.
c. En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0,5 ; 25].

4. Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?

5. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 ? Justifier la réponse.

PARTIE B

1. On admet que la fonction G définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $G(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle]0 ; +∞[.
En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 25].

2. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.

Correction exercice 3

$$f(x) = 18\ln x - x^2 + 16x - 15. \qquad D_f = [0,5 ; 25]$$

Partie A

1. Dérivons la fonction f

$$f'(x) = \frac{18}{x} - 2x + 16\ ; \qquad f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$$

2. Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 25].
Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-x^2 + 8x + 9)$ sur [0,5 ; 25] ; x étant positif.

$\Delta = 64+36 = 100$; d'où $x_1 = \frac{-8+10}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-8-10}{-2} = 9$ mais $x_1 \notin D_f$

Si $0,5 \le x \le 9$ alors $f'(x) \ge 0$ et f est strictement croissante
Si $9 \le x \le 25$ alors $f'(x) \le 0$ est f est strictement décroissante

x	0,5		9		25
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	$f(0,5)$ ↗		$f(9)$	↘	$f(25)$

$f(0,5) = 18\ln 0,5 - (0,5)^2 + 16(0,5) - 15.$
$f(0,5) = -18\ln 2 - 7,25$
$f(0,5) \approx -19,73$

$f(25) = 18\ln 25 - (25)^2 + 16(25) - 15.$
$f(25) = 36\ln 5 - 240$
$f(25) \approx -182,06$

$f(9) = 18\ln 9 - (9)^2 + 16(9) - 15.$
$f(9) = 36\ln 3 + 48$; $f(9) \approx 87,55$
.

3.a. $f(1) = 18\ln 1 - (1)^2 + 16(1) - 15$; $f(1) = 0.$

3.b. Sur l'intervalle [18 ; 19] l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α
$f(18) = 18\ln 18 - (18)^2 + 16(18) - 15.$
$f(18) = -18\ln 18 - 51$
$f(18) \approx 1,2$

$f(19) = 18\ln 19 - (19)^2 + 16(19) - 15.$
$f(19) = 18\ln 19 - 72$
$f(19) \approx -19$

f est une fct continue et strictement décroissante sur [18 ;19] et $0 \in [f(19) ; f(18)]$ d'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α.
Avec la calculatrice $\alpha \approx 18,05$ à 10^{-2} près.

3.c. Le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0,5 ; 25].

x	0,5		1		α		25
Signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	

4. Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut que $f(x) > 0$ donc il faut qu'elle produise entre 101 et 1805 ($f(18,05) > 0$ mais $f(18,06) < 0$) panneaux solaires.

5. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 . il faut résoudre $f(x) = 100$ or le maximum de f est $f(9)$ milliers d'euro, soit 87 550euro donc l'entreprise ne pourra atteindre le bénéfice de cent mille euro.

Partie B
1. Déterminons une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 25].
$f(x) = 18\ln x - x^2 + 16x - 15.$

$$F(x) = 18(x\ln x - x) - \frac{x^3}{3} + 8x^2 - 15x + 0$$

2. Déterminons la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.

$$m = \frac{1}{18-1}\int_1^{18} f(t)dt \text{ d'où } m = \frac{1}{17}\left[F(x)\right]_1^{18} \text{ donc } m = \frac{1}{17}\left(F(18) - F(1)\right)$$

$$F(18) = 18(18\ln 18 - 18) - \frac{18^3}{3} + 8\times 18^2 - 15\times 18 \text{ ; d'ou } F(18) \approx 990,48$$

$$F(1) = 1(1\ln 1 - 1) - \frac{1^3}{3} + 8\times 1^2 - 15\times 1 \text{ ; d'où } F(1) = -\frac{25}{3}$$

$m \approx \frac{1}{17}(990,48+8,33)$ soit $m \approx 58,726$ le bénéfice moyen si l'entreprise produit et vend entre 100et 1 800 panneaux solaires est de 58 726 €

<u>Exercice 4</u> *(6points)*

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le début diminue de 20% par jour à cause de la chaleur. Soit D_n le débit en m^3 pour le n-ième jour après le 1er juin.
Pour la journée du 1er juin, le débit D_0 est égal à 300 m^3 par jour.
On arrondira les résultats au dixième de mètre cube près.

1. a. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
   b. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n. Quelle est la nature de la suite (D_n)?
   c. Exprimer D_n en fonction de n. Calculer le débit D_{29} pour la journée du 30 juin.
   d. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin.

2. A partir du 1er juillet, le débit du ruisseau peut-être considéré comme nul (inférieur à 0,5 m^3 par jour). La chaleur provoque, dans la retenue, une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour. De plus on doit libérer de la retenue 500 m^3 d'eau chaque soir, après évaporation, à cause de la sécheresse. Le 1er juillet au matin, la retenue contient $V_0 = 100\,000\, m^3$.
   Soit V_n le volume d'eau au n-ième matin après le 1er juillet.
   a. Montrer que $V_1 = 95\,500\, m^3$
   b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

3. On considère la suite de terme général U_n définie, pour tout entier n, par $U_n = V_n + 12500$
   Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 dont on calculera le premier terme U_0.

4. Exprimer U_n en fonction de n. En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
5. Calculer V_{31} le volume restant au matin du 1er août.
6. A quelle date la retenue sera-t-elle à sec ? justifier le résultat.

<u>Correction exercice 4</u>

1.a. Calculer le débit D_1 ; $D_1 = D_0 - \frac{20}{100} D_0$; $D_1 = 0,8D_0$; $\underline{D_1 = 240 m^3}$.

1.b. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n. ; $D_{n+1} = D_n - \frac{20}{100} D_n$; donc $D_{n+1} = 0,8D_n$.

1.c. Exprimer D_n en fonction de n ; D_n est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $D_0 = 300 m^3$; donc $D_n = 300(0,8)^n$.

1.d. Calculer le volume d'eau, au cours des 30 jours du mois de juin.

$$D = D_0 + D_1 + D_2 + \cdots + D_{29}$$

$$D = D_0\left(\frac{1-q^{30}}{1-q}\right) = 300\left(\frac{1-0,8^{30}}{1-0,8}\right) \text{ ; donc } \underline{D = 1490\ m^3}.$$

2.a. Montrer que $V_1 = 95\,500\, m^3$

$$V_1 = V_0 - \frac{4}{100} V_0 - 500$$

$$V_1 = 0,96V_0 - 500 = 0,96 \times 100000 = 95\ 500 m^3$$

2.b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

$$V_{n+1} = V_n - \frac{4}{100}V_n - 500$$

$$V_{n+1} = 0,96 \times V_n - 500$$

3. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique et $U_n = V_n + 12500$

$$U_{n+1} = V_{n+1} + 12500$$

$$U_{n+1} = (0,96 \times V_n - 500) + 12500$$

$$U_{n+1} = 0,96(U_n - 12500) + 1200$$

$$U_{n+1} = 0,96U_n - 0,96 \times 12500 + 1200$$

$$U_{n+1} = 0,96U_n$$

La suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme U_0 avec

$$U_0 = V_0 + 12500; \; U_0 = 112500$$

4. Exprimer U_n en fonction de n :

$$U_n = U_0 \times q^n; \; U_n = 112500 \times (0,96)^n$$

Exprimer V_n en fonction de n :

$$V_n = U_n - 12500$$

$$V_n = 112500 \times (0,96)^n - 12500$$

5. Calculer V_{31}

$$V_{31} = U_{31} - 12500$$

$$V_{31} = 112500 \times (0,96)^{31} - 12500$$

$$V_{31} = 19236 \; m^3$$

6. A quelle date la retenue sera-t-elle à sec ?

Il faut résoudre l'inéquation $V_n \le 0$

$$V_n \le 0 \Leftrightarrow 112500 \times (0,96)^n - 12500 \le 0$$

$$V_n \le 0 \Leftrightarrow (0,96)^n \le \frac{12500}{112500}$$

$$V_n \le 0 \Leftrightarrow n \ln 0,96 \le \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$V_n \le 0 \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{\ln 0,96}$$

n ≥ 53,82 donc la retenue sera à sec à partir du 54ème jour ; soit à partir du 24 août.