Terminales ES1/ES2 – Spécialité Mathématiques

Année scolaire 2006-2007

Devoir Maison

Corrigé

Un raisonnement faux. A vous de trouver l'erreur !

Considérons la proposition suivante :

« Si un groupe de personnes contient une femme alors il ne contient que des femmes ».

Cette affirmation est manifestement fausse et votre classe en est un magnifique contre-exemple ! Pour autant, le raisonnement suivant vise à démontrer le contraire :

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, nous notons P_n la proposition suivante :

« Si un groupe de *n* personnes contient une femme, alors il contient *n* femmes »

La proposition P_1 est vraie, sans discussion possible : un « groupe » d'une femme contient bien … une femme !

Supposons que la proposition P_n soit vraie.
Nous considérons alors un groupe de $n+1$ personnes contenant au moins une femme.
Nous notons A_1, A_2, …, A_n et *F* les personnes de ce groupe. *F* désignant la femme dont l'existence est assurée.

Le groupe constitué de A_1, A_2, …, A_{n-1} et *F* est un groupe de *n* personnes. D'après l'hypothèse de récurrence, il ne contient donc que des femmes. A_1, A_2, … et A_{n-1} désignent donc des femmes (A_n n'apparaît pas).

De façon analogue, A_2, A_3, …, A_n et *F* est un groupe de *n* personnes. D'après l'hypothèse de récurrence, il ne contient que des femmes. A_2, A_3, … et A_n désignent donc des femmes.

De ce qui précède, on déduit que A_1, A_2, … et A_n sont des femmes.
Le groupe de $n+1$ personnes ne contient que des femmes. La propriété est établie au rang $n+1$.

Finalement, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 …

Quelque chose cloche ! Mais quoi ? A vous de trouver !

Corrigé du premier exercice

Comme dans beaucoup de situations, ce n'est pas tant au niveau du raisonnement que le bât blesse qu'au niveau de ce à quoi il s'applique …

La proposition P_1 est effectivement vraie : un « groupe » constitué d'une femme contient bien … une femme !

On suppose alors que la proposition P_n est vraie et on va s'intéresser à la proposition P_{n+1}.
Nous considérons ensuite un groupe de $n+1$ personnes contenant au moins une femme.

Jusque-là, tout est en ordre ! Nous menons proprement notre raisonnement par récurrence et … rien ne cloche ☺ !

A ce stade, on cherche, classiquement, à pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence … Il semble naturel de se ramener à un groupe de *n* personnes ! En l'occurrence ici, on considère les deux groupes de *n* personnes suivants :

- A_1, A_2, …, A_{n-1} et F ;
- A_2, A_3, …, A_n et *F*.

Le raisonnement tenu alors sur chacun de ces deux groupes est correct et conduit, in fine, à un résultat non valable. C'est donc au niveau de la définition même de ces deux groups de personnes qu'il faut porter notre attention.

Les écritures ci-dessus sont-elles toujours valables ?
En regardant de plus près les indices dans le premier groupe, on doit avoir : $n-1\geq 1$, c'est à dire $n\geq 2$. Il en va de même au niveau du deuxième groupe : il faut, ici encore, $n\geq 2$.
En y réfléchissant un peu, on conçoit simplement que pour pouvoir considérer les deux sous-groupes ci-dessous, il nous faut au moins 3 personnes (dont une femme) !

En conséquence, la proposition initiale à démontrer n'est pas P_1 mais P_2 ! Et là, vous pouvez prendre le problème par tous les bouts, vous n'arriverez pas à prouver qu'un groupe de deux personnes comporte au moins une femme ! (nous voilà rassuré(e)s)

La morale de cette histoire ? L'importance cruciale de la première étape du raisonnement par récurrence !
Dans la plupart des exercices proposés en terminale (la filière ne change pas grand'chose à l'affaire), l'accent est mis sur l'héritage (c'est à dire sur l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$). Pour autant, on ne saurait négliger la proposition initiale …

Un jeu de dé …

Trois amis, Antoine, Bernard et Christophe jouent au jeu suivant avec un dé à 6 faces parfaitement équilibré :

Antoine lance le dé. Si le 6 sort, il a gagné et la partie s'arrête. Si une autre face apparaît, il passe le dé à Bernard. Celui-ci lance alors le dé. Si le 6 sort, il a gagné et la partie s'arrête. Si une autre face apparaît, il passe le dé à Christophe. Celui-ci lance alors le dé. Si le 6 sort, il a gagné. Si une autre face apparaît, il passe le dé à Antoine … et ainsi de suite.

On défini les événements suivants :

- AG : « Antoine gagne la partie » ;
- BG : « Bernard gagne la partie » ;
- CG « Christophe gagne la partie ».

Le but de cet exercice est de déterminer les probabilités $p(\mathrm{AG})$, $p(\mathrm{BG})$ et $p(\mathrm{CG})$ de ces événements.

Dans la suite, les lettres A, B et C désigneront respectivement Antoine, Bernard et Christophe. Bien qu'il ne soit pas demandé, un arbre pondéré peut vous être utile.

1. Soit A_1 l'événement « A gagne au premier tour ». Calculer $p(\mathrm{A}_1)$;
2. Soit A_2 l'événement « A gagne au second tour ». Montrer que $p(\mathrm{A}_2)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}$;
3. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall\in\mathbb{N}^*,\ p(\mathrm{A}_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}$. En déduire que la suite $\left(p(\mathrm{A}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique (on précisera son premier terme et sa raison) ;
4. On note AG_n l'événement « A gagne au 1^er tour ou au second tour ou … ou au *n*ième tour ». On note S_n la probabilité de cet événement.
   Montrer que l'on a :
   $$S_n=\sum_{k=1}^{n}p(\mathrm{A}_k)\ =\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^6+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}$$
5. Donner une expression simplifiée de S_n ;
6. On admet que $p(\mathrm{AG})=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$. Calculer $p(\mathrm{AG})$;
7. On procédant de façon analogue, montrer que l'on a : $p(\mathrm{BG})=\frac{30}{91}$ et $p(\mathrm{CG})=\frac{25}{91}$;
8. **<u>Bonus</u>** : généraliser les résultats précédents en imaginant le même jeu joué par *m* joueurs au lieu de 3.

Corrigé du deuxième exercice

1. Au premier tour, le joueur A est le premier à lancer le dé. Il gagne si le 6 sort. Le dé étant bien équilibré, on a simplement :

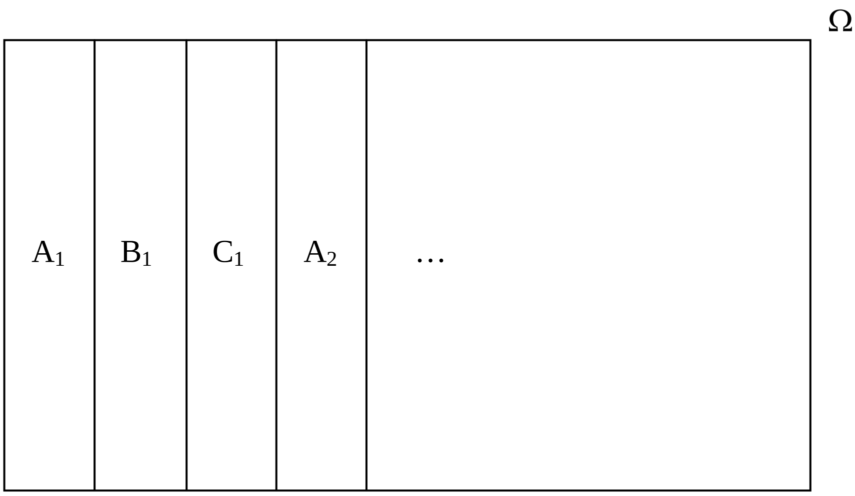
$$\boxed{p(A_1)=\frac{1}{6}}$$

2. Pour que le joueur A gagne au second tour, il faut nécessairement que :
   - A ait perdu au premier tour ;
   - B ait perdu au premier tour ;
   - C ait perdu au premier tour ;

   Si, pour être cohérent, nous notons B_1 l'événement « B gagne au premier tour » et C_1 l'événement « C gagne au premier tour », il vient :

$$p(A_2)=p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{C_1}\cap A_2\right)=p\left(A_2\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{C_1}\right)\times p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{C_1}\right)$$

   Cette égalité découle en fait de $A_2\subset\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{C_1}\right)$ et de la définition de la probabilité conditionnelle. On peut se convaincre du premier point en représentant l'univers probabiliste associé au jeu comme suit :



   Les événements A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, … forment une partition (attention ! Cette partition est donc constituée d'une infinité d'événements !) de l'univers.

   On a simplement : $p\left(A_2\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{C_1}\right)=\dfrac{1}{6}$.

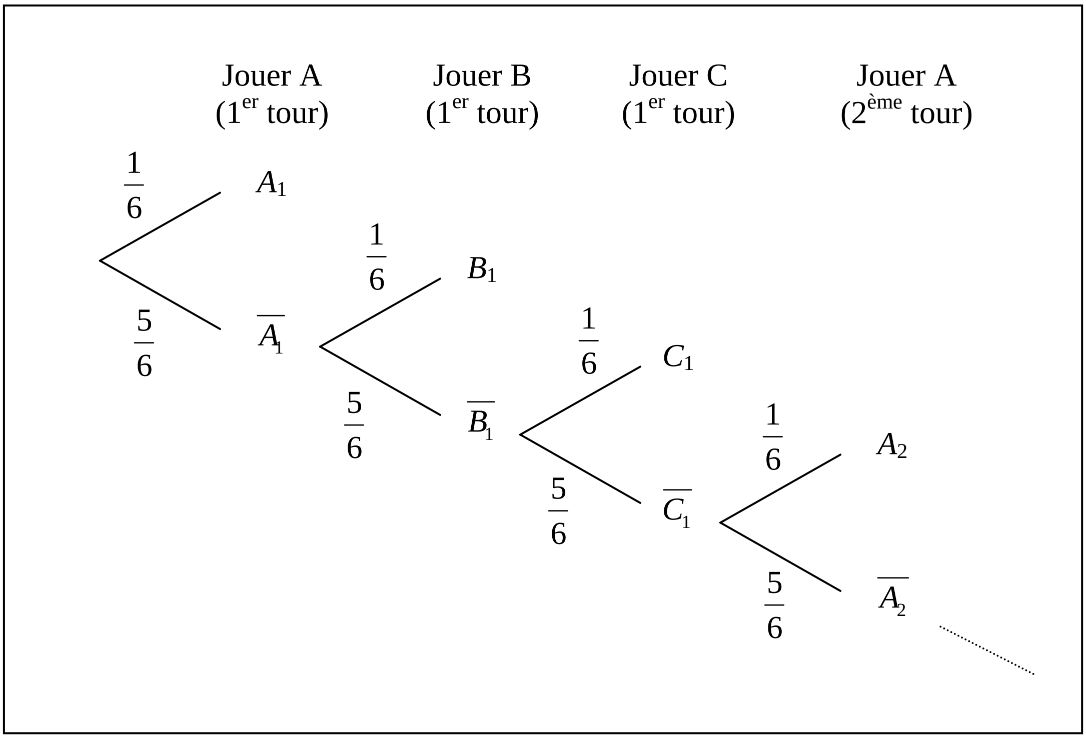
Par ailleurs :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{C_1}\right) &= p\left(\overline{C_1}\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\right)\times p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\right)\\ &= p\left(\overline{C_1}\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\right)\times p\left(\overline{B_1}\mid\overline{A_1}\right)\times p\left(\overline{A_1}\right)\\ &= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

On en déduit, finalement : $p\left(\mathrm{A}_2\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}$.

$$\boxed{p\left(\mathrm{A}_2\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}}$$

Les écritures ci-dessus peuvent s'avérer un peu délicates. Un arbre (voir ci-dessous) permet de poser le calcul directement et son recours (suggéré dans l'énoncé) pour poser le calcul aura été accepté comme seule justification.



3. Soit la proposition : P_n : « $p\left(\mathrm{A}_n\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}$ ».

A la question 1, on a montré $p\left(A_1\right)=\frac{1}{6}$.

Or, pour $n=1$, on a : $\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(1-1)}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{3\times 0}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{0}\times\frac{1}{6}=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

Ainsi, la proposition P_1 est-elle vraie.

Remarque : la question 2 nous permet de constater que la proposition P_2 est également vraie.

Supposons maintenant que la proposition P_n soit vraie.

Nous supposons donc : $p\left(\mathrm{A}_n\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}$.

Comme à la question 2, nous remarquons : $p\left(\mathrm{A}_n\right)=p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\mathrm{A}_n\right)$.

En raisonnant comme dans la question 2, on a :

$$\begin{aligned}p\left(\mathrm{A}_{n+1}\right)&=p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\cap\overline{\mathrm{C}_n}\cap\mathrm{A}_{n+1}\right)\\&=p\left(\mathrm{A}_{n+1}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\cap\overline{\mathrm{C}_n}\right)\times p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\cap\overline{\mathrm{C}_n}\right)\end{aligned}$$

On a encore : $p\left(\mathrm{A}_{n+1}\mid\overline{\mathrm{A}_0}\cap\overline{\mathrm{B}_0}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\cap\overline{\mathrm{C}_n}\right)=\frac{1}{6}$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\cap\overline{\mathrm{C}_n}\right)&=p\left(\overline{\mathrm{C}_n}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\right)\\&\quad\times p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\right)\\&=p\left(\overline{\mathrm{C}_n}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\right)\\&\quad\times p\left(\overline{\mathrm{B}_n}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\right)\\&\quad\times p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\right)\end{aligned}$$

On a encore :

$$p\left(\overline{\mathrm{C}_n}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\cap\overline{\mathrm{B}_n}\right)=\frac{5}{6}\ \text{ et }\ p\left(\overline{\mathrm{B}_n}\mid\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\overline{\mathrm{A}_n}\right)=\frac{5}{6}$$

Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$p\left(\mathrm{A}_n\right)=p\left(\overline{\mathrm{A}_1}\cap\overline{\mathrm{B}_1}\cap\ldots\cap\overline{\mathrm{C}_{n-1}}\cap\mathrm{A}_n\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}$$

On en déduit :

$$p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\right)=p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\right)-p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap A_n\right)$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}-\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\left[1-\frac{1}{6}\right]$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{5}{6}$$

D'où :

$$p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\cap\overline{B_n}\cap\overline{C_n}\right)=p\left(\overline{C_n}\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\cap\overline{B_n}\right)$$

$$\times p\left(\overline{B_n}\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\right)$$

$$\times p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\right)$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{5}{6}$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}$$

Finalement :

$$p\left(A_{n+1}\right)=p\left(A_{n+1}\mid\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\cap\overline{B_n}\cap\overline{C_n}\right)\times p\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{C_{n-1}}\cap\overline{A_n}\cap\overline{B_n}\cap\overline{C_n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}$$

La proposition est ainsi démontrée au rang $n+1$.

On a bien :

$$\boxed{\forall\in\mathbb{N}^*,\ p\left(A_n\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}}$$

On peut alors écrire :

$$p\left(A_n\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}\times\frac{1}{6}$$

$$=\left(\frac{6}{5}\right)^{3}\times\frac{1}{6}\times\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{n}=\frac{36}{125}\times\left(\frac{125}{216}\right)^{n}$$

On identifie ainsi une suite géométrique de raison $q=\dfrac{125}{216}$ et de premier terme $p(A_1)=\dfrac{1}{6}$.

4. On note AG_n l'événement « A gagne au 1[er] tour ou au second tour ou … ou au *n*ième tour ». On note S_n la probabilité de cet événement.

On veut montrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} p(\mathrm{A}_k)\ =\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^6+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}$$

Ici encore nous pouvons mener un raisonnement par récurrence.

Considérons alors la proposition :

$$R_n\ :\ «\ S_n=\sum_{k=1}^{n} p(\mathrm{A}_k)\ =\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^6+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\ »$$

On veut montrer que R_n est vraie pour tout entier naturel *n* non nul.

Pour $n=1$, on a : $S_1=\sum_{k=1}^{1} p(\mathrm{A}_k)\ =p(\mathrm{A}_1)=\dfrac{1}{6}$.
Par ailleurs, l'événement AG_1 est l'événement défini par « A gagne au premier tour ». Il s'agit donc en fait de l'événement A_1. On a bien : $p(\mathrm{AG}_1)=p(\mathrm{A}_1)$.

Supposons que la proposition soit vraie au rang *n*. C'est à dire, supposons que l'on ait :

$$p(\mathrm{AG}_n)=S_n=\sum_{k=1}^{n} p(\mathrm{A}_k)\ =\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^6+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}$$

On s'intéresse maintenant à l'événement AG_{n+1}.
On a immédiatement : $\mathrm{AG}_{n+1}=\mathrm{AG}_n\cup\mathrm{A}_{n+1}$ (gagner au cours d'un des $n+1$ premiers tours, c'est gagner au cours d'un des *n* premiers tours ou au cours du $n+1$ème …).

On a alors :

$$p(\mathrm{AG}_{n+1})=p(\mathrm{AG}_n)+p(\mathrm{A}_{n+1})-p(\mathrm{AG}_n\cap\mathrm{A}_{n+1})$$

Or, les événements AG_n et A_n sont incompatibles (on ne peut gagner au cours d'un des *n* premiers tours ET au $n+1$ème …).

On en déduit : $p(\mathrm{AG}_n\cap\mathrm{A}_{n+1})=0$.

Alors, en tenant compte de $p\left(\mathrm{A}_{n+1}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\times\frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned}
p\left(\mathrm{AG}_{n+1}\right)=S_{n+1} &= p\left(\mathrm{AG}_{n}\right)+p\left(\mathrm{A}_{n+1}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n} p\left(\mathrm{A}_{k}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\times\frac{1}{6}\\
&=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{6}+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\times\frac{1}{6}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1} p\left(\mathrm{A}_{k}\right)
\end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée au rang $n+1$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^{*},\ p\left(\mathrm{AG}_{n}\right)=S_{n}=\sum_{k=1}^{n} p\left(\mathrm{A}_{k}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{6}+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}}$$

5. En tenant compte du fait que S_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\left(\frac{5}{6}\right)^{3}=\frac{125}{216}$, nous avons, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
S_n &=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{6}+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\\
&=\frac{1}{6}\times\left[1+\left(\frac{5}{6}\right)^{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^{6}+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}\right]\\
&=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}}{1-\frac{125}{216}}\\
&=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}}{\frac{91}{216}}\\
&=\frac{1}{6}\times\frac{216}{91}\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right]\\
&=\frac{36}{91}\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right]
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\mathrm{AG}_n\right) = S_n = \frac{36}{91} \times \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right]}$$

On a : $0 < \frac{125}{216} < 1$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{125}{216}\right)^{n} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right] = 1$ et, finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{36}{91}$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p\left(\mathrm{AG}\right) = \frac{36}{91}}$$

6. Pour calculer $p\left(\mathrm{BG}\right)$, on reprend les étapes précédentes. Bien évidemment, nous n'allons pas redétailler toute la rédaction précédente en l'adaptant ! Nous allons fournir les éléments essentiels du raisonnement à mener.

   On a facilement : $p\left(\mathrm{B}_1\right) = p\left(\overline{A_1} \cap B_1\right) = p\left(B_1 \mid \overline{A_1}\right) \times p\left(\overline{A_1}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$.

   Puis : $p\left(\mathrm{B}_2\right) = p\left(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{C_1} \cap \overline{A_2} \cap B_2\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$.

   Par rapport aux calculs menés dans les questions précédentes, tous les calculs relatifs aux probabilités des événements B_n découlent de ceux menés sur les probabilités des événements A_n via une multiplication par $\frac{5}{6}$. Ce résultat est simplement lié au fait que B est le deuxième joueur (dans chaque tour de jeu). Cette remarque est importante pour le bonus.

   On montre alors sans difficulté :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\mathrm{BG}_n\right) = \frac{5}{6} \times \frac{36}{91} \times \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right] = \frac{30}{91} \times \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right]}$$

   D'où :

$$\boxed{p\left(\mathrm{BG}\right) = \lim_{n \to +\infty} p\left(\mathrm{BG}_n\right) = \frac{30}{91}}$$

En raisonnant de façon analogue on établit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\mathrm{CG}_n\right) = \frac{5}{6} \times \frac{30}{91} \times \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right] = \frac{25}{91} \times \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\right]}$$

Et :

$$\boxed{p\left(\mathrm{BG}\right) = \lim_{n \to +\infty} p\left(\mathrm{CG}_n\right) = \frac{25}{91}}$$

Au final (s'en étonnera-t-on ?) on constate que ce jeu est d'autant plus favorable que l'on se trouve proche du premier joueur (la situation la plus favorable étant d'être le premier joueur !).

7. On suppose maintenant qu'il y a m joueurs autour de la table (on suppose $m \geq 2$).
Nous notons ces joueurs J1, J2, J3, …, Jm sans indice (nous réservons les indices pour désigner, ici encore, les tours de jeu).

Ce nombre est un paramètre du problème.

Si nous reprenons les questions précédentes en appliquant le même raisonnement, on établit sans difficulté nouvelle :

$$p\left(\mathrm{J1}_1\right) = \frac{1}{6} \text{ et } p\left(\mathrm{J1}_2\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^m \times \frac{1}{6}$$

La deuxième expression traduit simplement le fait que le joueur J1 gagne au second tour à la condition (nécessaire mais non suffisante) que les m joueurs ont perdu au premier tour. Par rapport au jeu à trois joueurs, c'est au niveau de l'exposant de $\frac{5}{6}$ que les choses ont changé.

On obtient alors :

$$\forall \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\mathrm{J1}_n\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{m(n-1)} \times \frac{1}{6}$$

On note que dans cette situation générale, la raison de la suite géométrique vaut : $\left(\frac{5}{6}\right)^m$.

On a ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p\left(\mathrm{J1G}_n\right) = S_n = \sum_{k=1}^{n} p\left(\mathrm{J1}_k\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^m + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{2m} + \ldots + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{m(n-1)}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
p\left(\mathrm{J1}_n\right) &= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^m+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{2m}+\ldots+\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{m(n-1)} \\
&= \frac{1}{6}\times\left[1+\left(\frac{5}{6}\right)^m+\left(\frac{5}{6}\right)^{2m}+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{m(n-1)}\right] \\
&= \frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{mn}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{m}} \\
&= \frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{mn}}{1-\frac{5^m}{6^m}} \\
&= \frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{mn}}{\frac{6^m-5^m}{6^m}} \\
&= \frac{1}{6}\times\frac{6^m}{6^m-5^m}\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{mn}\right] \\
&= \frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{mn}\right]
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p\left(\mathrm{J1G}_n\right)=\frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}\times\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{mn}\right]}$$

Comme $0<\frac{5}{6}<1$ et $m\geq 2$, on a : $0<\left(\frac{5}{6}\right)^m<1$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{mm}=0$ et, finalement :

$$\boxed{p\left(\mathrm{J1G}\right)=\lim_{n\to+\infty}p\left(\mathrm{J1G}_n\right)=\frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}}$$

Pour $m=3$, on retrouve : $p\left(\mathrm{J1G}\right)=\frac{6^{3-1}}{6^3-5^3}=\frac{36}{216-125}=\frac{36}{91}$.

Comme précédemment également, on obtiendra la probabilité $p(\text{J2G})$ en multipliant $p(\text{J1G})$ par $\dfrac{5}{6}$. On a donc :

$$p(\text{J2G})=\frac{5}{6}\times p(\text{J1G})=\frac{5}{6}\times\frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}=\frac{5\times 6^{m-2}}{6^m-5^m}$$

Puis :

$$p(\text{J3G})=\frac{5^2\times 6^{m-3}}{6^m-5^m}$$

Et, de façon générale, pour le joueur J*k* (*k* entier naturel compris entre 1 et *m*) :

$$\boxed{p(\text{J}k\text{G})=\frac{5^{k-1}\times 6^{m-k}}{6^m-5^m}=\frac{6^m}{5\left(6^m-5^m\right)}\times\left(\frac{5}{6}\right)^k}$$

A titre de vérification (partielle), calculons la somme de ces probabilités :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} p(\text{J}k\text{G}) &= \sum_{k=1}^{m}\frac{5^{k-1}\times 6^{m-k}}{6^m-5^m}=\frac{6^m}{5}\times\frac{1}{6^m-5^m}\times\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{5}{6}\right)^k\\
&=\frac{6^m}{5}\times\frac{1}{6^m-5^m}\times\left[\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^m\right]\\
&=\frac{6^m}{5}\times\frac{1}{6^m-5^m}\times\frac{5}{6}\times\left[1+\frac{5}{6}+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}\right]\\
&=\frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^m}{1-\frac{5}{6}}\\
&=\frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}\times\frac{\frac{6^m-5^m}{6^m}}{\frac{1}{6}}\\
&=\frac{6^{m-1}}{6^m-5^m}\times\frac{6^m-5^m}{6^m}\times 6\\
&=1
\end{aligned}$$

Bien évidemment, on peut pousser la généralisation en supposant qu'un joueur donné a, lorsque c'est à lui de jouer, une probabilité *p* de gagner (au lieu de $\dfrac{1}{6}$) et une probabilité $1-p$ de perdre. Ici encore, il s'agira essentiellement d'une démarche de récriture, le raisonnement demeurant inchangé.