# *Lois à densité*

Corrigés d'exercices / Version de juin 2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Page 205 : | N°**43**, **44** | Page 211 : | N°**77**, **80** |
| Page 206 : | N°**48**, **57**, **58** | Page 212 : | N°**81** |
| Page 207 : | N°**60**, **63** | Page 215 : | N°**97** |

## N°43 page 205

1) D'après le cours (résultat à connaître par cœur !), on a, pour une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite : $p(-2 \leq \mathrm{X} \leq 2) = p(\mathrm{X} \in [-2\,;2]) \simeq 0,95$.

   On en déduit immédiatement :

   $$\boxed{a = 2}$$

   Remarque : ce genre de question est, in fine, très mal posée, l'usage de l'article défini « le » (… nombre réel *a* tel que …) étant plus que malvenu ! Vous savez en effet, que l'on a également : $p(-1,96 \leq \mathrm{X} \leq 1,96) \simeq 0,95$ (mais cette fois, on est plus proche de 0,95 !).
   Ainsi, on peut répondre de bien des façons !
   Concrètement, la réponse fournie ci-dessus est celle qui se rapporte directement à un résultat classique du cours (à connaître par cœur, on ne le répétera jamais assez ! ☺).

2) En tenant compte de la parité de la densité de la loi normale centrée réduite (ou, graphiquement, de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnée de sa courbe représentative), on a, pour tout réel *x* positif : $p(-x \leq \mathrm{X} \leq 0) = p(0 \leq \mathrm{X} \leq x)$ et donc :
   $p(-x \leq \mathrm{X} \leq x) = p(-x \leq \mathrm{X} \leq 0) + p(0 \leq \mathrm{X} \leq x) = 2p(0 \leq \mathrm{X} \leq x)$.

   Finalement : $p(0 \leq \mathrm{X} \leq x) = \dfrac{1}{2}p(-x \leq \mathrm{X} \leq x)$.

   On en déduit : $p(0 \leq \mathrm{X} \leq a) = \dfrac{1}{2}p(-a \leq \mathrm{X} \leq a) \simeq \dfrac{1}{2} \times 0,95 = 0,475$.

   $$\boxed{p(0 \leq \mathrm{X} \leq a) \simeq 0,475}$$

3) On a ici :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X} \le a) &= p(\mathrm{X} \in ]-\infty\,;a]) \\ &= p(\mathrm{X} \in ]-\infty\,;0] \text{ ou } \mathrm{X} \in ]0\,;a]) \\ &= p(\mathrm{X} \in ]-\infty\,;0]) + \underbrace{p(\mathrm{X} \in ]0\,;a])}_{=p(\mathrm{X}\in[0\,;a])} \\ &\simeq \frac{1}{2} \times 0,475 \\ &= 0,975 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(\mathrm{X} \le a) \simeq 0,975}$$

## N°44 page 205

1. Le nombre « $-1\mathrm{E}+99$ » (CASIO) ou « $-10\wedge 99$ » (TI) représente « $-\infty$ ». La borne supérieure saisie vaut 1,5. Ainsi, Malika et Alexandra ont utilisé leur calculatrice pour obtenir une valeur approchée de la probabilité que la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite prenne une valeur dans l'intervalle $]-\infty\,;1,5]$. Si (en jetant un œil à la question suivante …), on note X cette variable aléatoire, la probabilité calculée est donc :

$$\boxed{p(\mathrm{X} \in ]-\infty\,;1,5]) = p(\mathrm{X} \le 1,5)}$$

2. En retenant alors la valeur approchée $p(\mathrm{X} \in ]-\infty\,;1,5]) = p(\mathrm{X} \le 1,5) \simeq 0,933193$, il vient :
   a) $p(\mathrm{X} > 1,5) = 1 - p(\mathrm{X} \le 1,5) \simeq 1 - 0,933193 = \boxed{0,066807}$.
   b) Par ailleurs (le calcul qui suit est classique ! Aidez-vous éventuellement de la courbe en cloche pour bien en comprendre les étapes) :

$$\begin{aligned} p(-1,5 < X < 1,5) &= p(\mathrm{X} < 1,5) - p(\mathrm{X} < -1,5) \\ &= p(\mathrm{X} < 1,5) - p(\mathrm{X} > 1,5) \\ &= p(\mathrm{X} < 1,5) - \left[1 - p(\mathrm{X} < 1,5)\right] \\ &= 2p(\mathrm{X} < 1,5) - 1 \\ &\simeq 2 \times 0,933193 - 1 \\ &= \boxed{0,866386} \end{aligned}$$

   c) Enfin, en utilisant le résultat du *a*) : $p(\mathrm{X} < -1,5) = p(\mathrm{X} > 1,5) \simeq \boxed{0,066807}$

## N°48 page 206

A la calculatrice, on obtient facilement : $p(0,2 < X < 0,7) \simeq 0,178\,777$.

En tenant compte de la parité de la densité de la loi normale centrée réduite (ou, de façon équivalente, de la symétrie de sa courbe représentative), on a immédiatement :

$$p(-0,7 < X < -0,2) = p(0,2 < X < 0,7)$$

Finalement :

$$\boxed{p(-0,7 < X < -0,2) = p(0,2 < X < 0,7) \simeq 0,178\,777}$$

## N°51 page 206

Je vous propose la correction de cet exercice car l'énoncé comporte (encore une fois …) une jolie coquille : la variable aléatoire X désigne en fait le temps réalisé par un marcheur pris au hasard.

Comme nous disposons d'une information fondamentale relative à la variable aléatoire Z (elle suit la loi normale centrée réduite), nous devons nous ramener à des calculs sur cette loi.

1. On cherche ici $p(X < 200)$.

   On a :

$$\begin{aligned} p(X < 200) &= p(X - 240 < 200 - 240) = p(X - 240 < -40) \\ &= p\left(\frac{X-240}{20} < \frac{-40}{20}\right) = p\left(\frac{X-240}{20} < -2\right) \\ &= p(Z < -2) \\ &\simeq 0,022\,750 \end{aligned}$$

| |
|---|
| La probabilité qu'un participant choisi au hasard ait mis moins de 200 minutes pour effectuer le parcours est d'environ $0,022\,750$ soit $2,275\%$. |

2. On cherche ici $p\left(X<320\,|\,X>300\right)$.
Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}
p\left(\mathrm{X}<320\,|\,\mathrm{X}>300\right)&=\frac{p\left(\mathrm{X}<320\cap\mathrm{X}>300\right)}{p\left(\mathrm{X}>300\right)}=\frac{p\left(300<\mathrm{X}<320\right)}{p\left(\mathrm{X}>300\right)}\\
&=\frac{p\left(300-240<\mathrm{X}-240<320-240\right)}{p\left(\mathrm{X}-240>300-240\right)}=\frac{p\left(60<\mathrm{X}-240<80\right)}{p\left(\mathrm{X}-240>60\right)}\\
&=\frac{p\left(\frac{60}{20}<\frac{\mathrm{X}-240}{20}<\frac{80}{20}\right)}{p\left(\frac{\mathrm{X}-240}{20}>\frac{60}{20}\right)}=\frac{p\left(3<\frac{\mathrm{X}-240}{20}<4\right)}{p\left(\frac{\mathrm{X}-240}{20}>3\right)}\\
&=\frac{p\left(3<Z<4\right)}{p\left(Z>3\right)}
\end{aligned}$$

On a : $p\left(3<Z<4\right)\simeq 0{,}001\,318$ et $p\left(Z>3\right)\simeq 0{,}001\,350$. Mais à ce stade du calcul, il serait plutôt malvenu d'effectuer le rapport de ces deux valeurs approchées. Mieux vaut utiliser la fonction NormCD (calculatrices CASIO. On la trouve dans le « Catalog ») deux fois dans un seul calcul :

$$\mathrm{NormCD}\left(3,4,1,0\right)/\,\mathrm{NormCD}\left(3,1\mathrm{E}99,1,0\right)$$

Petit rappel sur les arguments de cette fonction : on saisit d'abord les bornes inférieures et supérieures (« Lower » et « Upper » lorsque vous utilisez cette fonction via le menu « Statistiques ») puis l'écart type et enfin l'espérance.

On obtient ici : $\dfrac{p\left(3<Z<4\right)}{p\left(Z>3\right)}\simeq 0{,}976\,538$.

Si un participant a mis plus de 300 minutes pour effectuer le parcours,
la probabilité qu'il ait mis moins de 320 minutes est environ égale à $0{,}976\,538$.

## N°57 page 206

A l'aide de la calculatrice (loi normale inverse), on obtient : $t\simeq 4{,}662$.

Si X suit la loi normale $\mathscr{N}\left(5\,;1^2\right)$ alors : $p\left(\mathrm{X}<t\right)=0{,}3678\Leftrightarrow t\simeq 4{,}662$.

## N°58 page 206

A l'aide de la calculatrice (loi normale inverse), on obtient : $t \simeq 6,853$.

Si X suit la loi normale $\mathscr{N}\left(7,2\,;0,5^2\right)$ alors : $p\left(\mathrm{X} > t\right) = 0,756 \Leftrightarrow t \simeq 6,853$.

Remarques :

- La probabilité fournie (0,756) étant supérieure à 0,5 on s'attendait bien à ce que la valeur de *t* soit inférieure à l'espérance (faites un dessin de la courbe en cloche !).
- A la calculatrice (CASIO) vous devez faire attention à l'item Tail ! Si la probabilité fournie est celle d'un événement de la forme :
  - $p\left(\mathrm{X} < t\right)$, vous choisissez « Left ».
  - $p\left(\mathrm{X} > t\right)$, vous choisissez « Right ».
  - $p\left(-t < \mathrm{X} < t\right)$, vous choisissez « Central ».

## N°60 page 207

Soit N la variable aléatoire désignant la note obtenue à l'examen, cette note ayant été choisie au hasard. D'après l'énoncé, N suit la loi normale $\mathscr{N}\left(47\,;12^2\right)$.

L'énoncé précise que « la mention très bien est attribuée aux 15% les meilleurs ». Dans le cadre de notre modèle probabiliste, si on note x la note minimale devant être obtenue pour obtenir cette mention, on a : $p\left(N \geq x\right) = 15\% = 0,15$.

En utilisant la loi normale inverse à la calculatrice, on obtient : $x \simeq 59,437$. En admettant que les notes données sont entières, on conclut finalement :

Pour obtenir la mention très bien, il faut obtenir une note au moins égale à 60.

## N°63 page 207

Notons A la variable aléatoire correspondant à l'âge d'apparition des premiers mots. D'après l'énoncé, A suit la loi normale $\mathscr{N}\left(12,1\,;3,4^2\right)$.

1. a) On cherche ici $p\left(\mathrm{A} < 10\right)$. A la calculatrice, on obtient : $\boxed{p\left(\mathrm{A} < 10\right) \simeq 0,268\,404}$.

   b) On cherche ici $p\left(\mathrm{A} > 18\right)$. A la calculatrice, on obtient : $\boxed{p\left(\mathrm{A} > 18\right) \simeq 0,041\,344}$.

c) On cherche ici : $p(8 < \mathrm{A} < 16)$.

A la calculatrice, on obtient : $\boxed{p(8 < \mathrm{A} < 16) \simeq 0,760\,390}$.

2. On cherche ici $p(A < 15 \mid A > 10)$.

   Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$p(\mathrm{A} < 15 \mid \mathrm{A} > 10) = \frac{p(\mathrm{A} < 15 \cap \mathrm{A} > 10)}{p(\mathrm{A} > 10)} = \frac{p(10 < \mathrm{A} < 15)}{p(\mathrm{A} > 10)}$$

   Comme dans l'exercice 51, nous utilisons deux fois la fonction NormCD (calculatrices CASIO) dans un seul calcul :

$$\mathrm{NormCD}(10, 15, 3.4, 12.1) / \mathrm{NormCD}(10, 1\mathrm{E}99, 3.4, 12.1)$$

   On obtient ici : $\dfrac{p(10 < \mathrm{A} < 15)}{p(\mathrm{A} > 10)} \simeq 0,730\,936$.

| |
|---|
| La probabilité qu'un enfant n'ayant pas prononcé ses premiers mots à l'âge de 10 mois les prononce avant l'âge de 15 mois est environ égale à 0,730 936. |

## N°77 page 211

1. a) Pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$\mathrm{F}'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

   Ainsi :

| |
|---|
| La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$. |

   b) On cherche un réel *b* tel que $\int_1^b \ln x \, dx = 1$.

   D'après la question précédente, on a, pour tout réel *b* strictement positif :

$$\int_1^b \ln x \, dx = \left[\mathrm{F}(x)\right]_1^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(1) = b \ln b - b - (1 \times \ln 1 - 1) = b \ln b - b + 1$$

   Il vient alors, en tenant compte du fait que nous cherchons un réel strictement positif :

$$\int_1^b \ln x \, dx = 1 \Leftrightarrow b \ln b - b + 1 = 1 \Leftrightarrow b \ln b - b = 0 \Leftrightarrow b(\ln b - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = e$$

2. a) On a :

$$p(\mathrm{X}<2)=\int_1^2 \ln x\,dx=\left[\mathrm{F}(x)\right]_1^2=\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(1)=2\ln 2-2-(-1)=2\ln 2-1\simeq 0,386$$

$$\boxed{p(\mathrm{X}<2)\simeq 0,386}$$

b) On cherche ici : $p(\mathrm{X}<2,5\,|\,\mathrm{X}>2)$

On a : $p(\mathrm{X}<2,5\,|\,\mathrm{X}>2)=\dfrac{p(\mathrm{X}<2,5\cap\mathrm{X}>2)}{p(\mathrm{X}>2)}=\dfrac{p(2<\mathrm{X}<2,5)}{p(\mathrm{X}>2)}=\dfrac{\int_2^{2,5}\ln x\,dx}{\int_2^{e}\ln x\,dx}$

Or :

$$\int_2^{2,5}\ln x\,dx=\left[\mathrm{F}(x)\right]_2^{2,5}=\mathrm{F}(2,5)-\mathrm{F}(2)=2,5\ln 2,5-2,5-(2\ln 2-2)=2,5\ln 2,5-2\ln 2-0,5$$

$$\int_2^{e}\ln x\,dx=\left[\mathrm{F}(x)\right]_2^{e}=\mathrm{F}(e)-\mathrm{F}(2)=\cancel{e\ln} e-\cancel{e}-(2\ln 2-2)=2-2\ln 2$$

D'où : $p(\mathrm{X}<2,5\,|\,\mathrm{X}>2)=\dfrac{\int_2^{2,5}\ln x\,dx}{\int_2^{e}\ln x\,dx}=\dfrac{2,5\ln 2,5-2\ln 2-0,5}{2-2\ln 2}\simeq 0,659$

$$\boxed{p(\mathrm{X}<2,5\,|\,\mathrm{X}>2)\simeq 0,659}$$

## N°80 page 211

Rappelons que la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ ($a<b$) est la fonction constante sur cet intervalle prenant la valeur $\dfrac{1}{b-a}$. Par ailleurs, si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$, on a, pour tous réels $c$ et $d$ ($c<d$) de cet intervalle :

$$p(\mathrm{X}\in[c\,;d])=\frac{d-c}{b-a}$$

a) On cherche ici : $p(\mathrm{X}<2)$. On a, d'après ce qui précède :

$$p(\mathrm{X}<2)=p(\mathrm{X}\in[2\,;\pi])=\frac{\pi-2}{\pi-0}=\frac{\pi-2}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}\simeq 0,363\,380$$

$$\boxed{p(\mathrm{X}<2)=1-\frac{2}{\pi}\simeq 0,363\,380}$$

b) Notons A l'événement « la deuxième décimale du nombre obtenu est égale à 5 ».
Nous cherchons donc ici : $p\left(A \mid X > \frac{\pi}{2}\right)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle : $p\left(A \mid X > \frac{\pi}{2}\right) = \frac{p\left(A \cap \left(X > \frac{\pi}{2}\right)\right)}{p\left(X > \frac{\pi}{2}\right)}$.

L'événement $A \cap \left(X > \frac{\pi}{2}\right)$ est réalisé pour tout nombre de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ dont la deuxième décimale est égale à 5, c'est-à-dire, pour tout nombre de l'intervalle $\left[2,5 ; 2,6\right[$.
On a donc :

$$p\left(A \mid X > \frac{\pi}{2}\right) = \frac{p\left(A \cap \left(X > \frac{\pi}{2}\right)\right)}{p\left(X > \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p\left(X \in \left[2,5 ; 2,6\right[\right)}{p\left(X \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right]\right)} = \frac{\frac{2,6-2,5}{\pi}}{\frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{\pi}} = \frac{0,1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{0,2}{\pi} = \frac{1}{5\pi} \simeq 0,063\,662$$

> Sachant que le nombre choisi est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la probabilité
> que sa deuxième décimale soit 5 vaut $\frac{1}{5\pi}$, soit environ $0,063\,662$.

## N°81 page 212

Notons D la demande quotidienne de l'article chez le grossiste. D'après l'énoncé, la variable aléatoire D suit la loi normale $\mathcal{N}\left(90 ; 20^2\right)$.

a) Un jour donné, il y aura rupture de stock si la demande D est strictement supérieure à 100 (i.e. au stock en début de journée).
On cherche donc : $p\left(D > 100\right)$.
A la calculatrice, on obtient : $p\left(D > 100\right) \simeq 0,308\,538$.

> La probabilité de se retrouver en rupture de stock en fin de journée
> est environ égale à $0,308\,538$.

b) On cherche ici $p\left(D > 100 \mid D > 50\right)$.

On a : $p(\mathrm{D}>100 \mid \mathrm{D}>50)=\dfrac{p(\mathrm{D}>100 \cap \mathrm{D}>50)}{p(\mathrm{D}>50)}=\dfrac{p(\mathrm{D}>100)}{p(\mathrm{D}>50)}$.

A la calculatrice, on obtient : $\dfrac{p(\mathrm{D}>100)}{p(\mathrm{D}>50)} \simeq 0{,}315\,720$.

La probabilité de se retrouver en rupture de stock en fin de journée
sachant que plus de 50 articles ont déjà été vendus est environ égale à $0{,}315\,720$.

c) On raisonne donc sur 6 jours.
Pour pouvoir répondre à la question posée, nous allons compléter l'énoncé en faisant l'hypothèse (assez raisonnable) que les demandes des différents jours sont indépendantes.

Notons alors N le nombre de fois où le grossiste se retrouve en rupture de stock.
Avec le résultat de la première question et l'hypothèse précédente, nous pouvons affirmer que la variable aléatoire N suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0{,}308\,538$ (pour le schéma de Bernoulli considéré, l'événement SUCCES correspond à « il y a rupture de stock »).

On cherche ici : $p(\mathrm{N} \geq 2)$.

On a :

$$
\begin{aligned}
p(\mathrm{N} \geq 2) &= 1-p(\mathrm{N}<2) \\
&= 1-\left[p(\mathrm{N}=0)+p(\mathrm{N}=1)\right] \\
&= 1-\left[\binom{n}{0} p^{0}(1-p)^{n}+\binom{n}{1} p^{1}(1-p)^{n-1}\right] \\
&= 1-\left[\binom{6}{0} \times 0{,}308\,538^{0} \times(1-0{,}308\,538)^{6}+\binom{6}{1} \times 0{,}308\,538^{1} \times(1-0{,}308\,538)^{6-1}\right] \\
&= 1-\left[0{,}691\,462^{6}+6 \times 0{,}308\,538 \times 0{,}691\,462^{5}\right] \\
&\simeq 0{,}598\,084
\end{aligned}
$$

La probabilité que le grossiste se retrouve au moins deux fois
en rupture de stock dans la semaine est environ égale à $0{,}598\,084$.

## N°97 page 215

a) On a : $p(\mathrm{X}<1)=\int_0^1 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_0^1=-e^{-2\times 1}-\left(-e^{-2\times 0}\right)=-e^{-2}+1=1-\frac{1}{e^2}$

$$\boxed{p(\mathrm{X}<1)=1-\frac{1}{e^2}}$$

b) On généralise, dans un premier temps, le calcul précédent. Pour tout réel $t$ positif, on a :

$$p(\mathrm{X}<t)=\int_0^t 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_0^t=-e^{-2t}-\left(-e^{-2\times 0}\right)=-e^{-2t}+1=1-\frac{1}{e^{2t}}$$

Il vient alors : $p(\mathrm{X}>t)=1-p(\mathrm{X}\leq t)=1-p(\mathrm{X}<t)=1-\left(1-\frac{1}{e^{2t}}\right)=\frac{1}{e^{2t}}$ .

Pour tout réel $t$ positif, on a :
$p(\mathrm{X}<t)=1-\frac{1}{e^{2t}}$ et $p(\mathrm{X}>t)=\frac{1}{e^{2t}}$

c) La suite $(t_n)$ étant arithmétique de premier terme $t_0=0$ et de raison $r>0$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, t_n=t_0+nr=nr$$

Il vient alors, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\mathrm{P}_n=p(\mathrm{X}>t_n)=\frac{1}{e^{2t_n}}=\frac{1}{e^{2nr}}=\frac{1}{\left(e^{2r}\right)^n}=\left(\frac{1}{e^{2r}}\right)^n$$

Ainsi :

La suite $(\mathrm{P}_n)$ est la suite géométrique de premier terme $\mathrm{P}_0=1$ et de raison $q=\frac{1}{e^{2r}}$ .