Fonction exponentielle

Corrigés d'exercices / Version de décembre 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 41 :	N°**9**	Page 49 :	N°**51**
Page 43 :	N°**15**	Page 50 :	N°**60**
Page 45 :	N°**20**, **22**, **23**	Page 55 :	N°**81**

N°9 page 41

a) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

$$5^{2x}-1=0 \Leftrightarrow 5^{2x}=1 \Leftrightarrow 5^{2x}=5^0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

L'équation admet une solution : 0.

b) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

$$2^x \times 4 = 8^{3x} \Leftrightarrow 2^x \times 2^2 = \left(2^3\right)^{3x} \Leftrightarrow 2^{x+2}=2^{9x} \Leftrightarrow x+2=9x \Leftrightarrow 8x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

L'équation admet une solution : $\frac{1}{4}$.

c) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

$$3^{x-1}-27=0 \Leftrightarrow 3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$$

L'équation admet une solution : 4.

d) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

$$7^{x+1}=49^{x-3} \Leftrightarrow 7^{x+1}=\left(7^2\right)^{x-3} \Leftrightarrow 7^{x+1}=7^{2(x-3)} \Leftrightarrow x+1=2\left(x-3\right) \Leftrightarrow x+1=2x-6 \Leftrightarrow x=7$$

L'équation admet une solution : 4.

N°15 page 43

a) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{3x-4} < e^{-7-x} \Leftrightarrow 3x-4 < -7-x \Leftrightarrow 4x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle : $\left]-\infty\,;-\frac{3}{4}\right[$.

b) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{\frac{1}{x}} \geq e \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \geq e^1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle : $]0\,;1]$.

c) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{3-2x} \leq e^{x^2} \Leftrightarrow 3-2x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0$$

Remarque : pour la dernière factorisation, on aura remarqué que 1 est racine évidente de x^2+2x-3 (la somme des coefficients est nulle).

Comme le coefficient de « x^2 » est nul, le trinôme x^2+2x-3 est strictement positif à l'extérieur des racines : $x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;1] \cup [3\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'équation est : $]-\infty\,;1] \cup [3\,;+\infty[$.

N°20 page 45

La fonction g est de la forme $g = e^u$ où u est la fonction définie par : $u : x \mapsto -2x^2$.
La fonction u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme (pour tout x réel, on a : $u'(x) = -4x$), on en déduit que la fonction g est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a alors :

$$g'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = -4x \times e^{-2x^2}$$

En particulier pour $x = 1$: $g'(1) = -4 \times 1 \times e^{-2\times 1^2} = -4e^{-2}$.

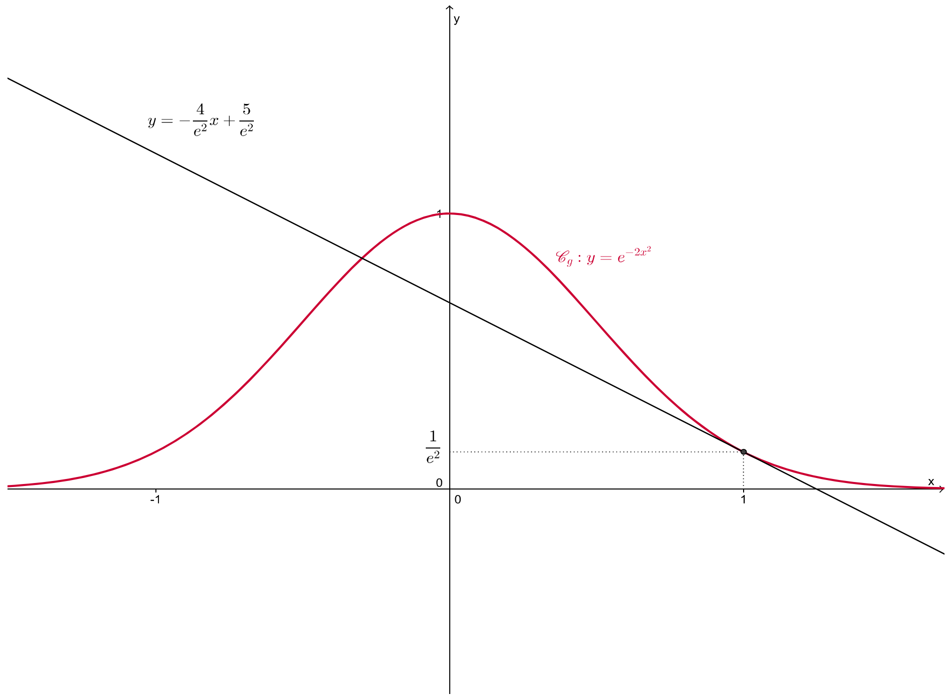
Par ailleurs, on a : $g(1) = e^{-2\times 1^2} = e^{-2}$.

Ainsi, l'équation réduite de la tangent à Γ en 1 s'écrit :

$$y = g'(1) \times (x-1) + g(1) = -4e^{-2}(x-1) + e^{-2} = -4e^{-2}x + 5e^{-2}$$

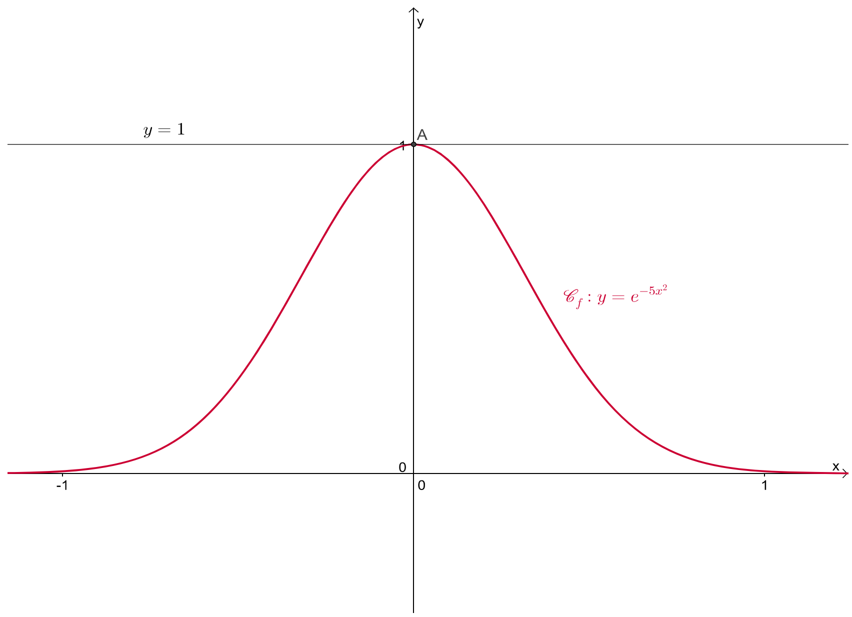
$$\boxed{y = -4e^{-2}x + 5e^{-2} = -\frac{4}{e^2}x + \frac{5}{e^2}}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-après la courbe représentative de la fonction g ainsi que la tangente demandée.



N°22 page 45

Pour tout x réel, on a $x^2 \geq 0$ et donc $-5x^2 \leq 0$. Or : $-5x^2 \leq 0 \Leftrightarrow e^{-5x^2} \leq e^0 \Leftrightarrow e^{-5x^2} \leq 1$.
Cette dernière inégalité signifie que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est située sous la droite d'équation $y = 1$. Comme $e^{-5x^2} = 1 \Leftrightarrow -5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, on en déduit que $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = 1$ se coupent au point $(0\,;1)$.



N°23 page 45

On peut s'intéresser à la différence $f(x)-g(x)$:

$$f(x)-g(x)=e^{-x^2}-e^{-2x^2}=e^{-2x^2}\left(e^{x^2}-1\right)$$

Comme la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives, on a déjà :

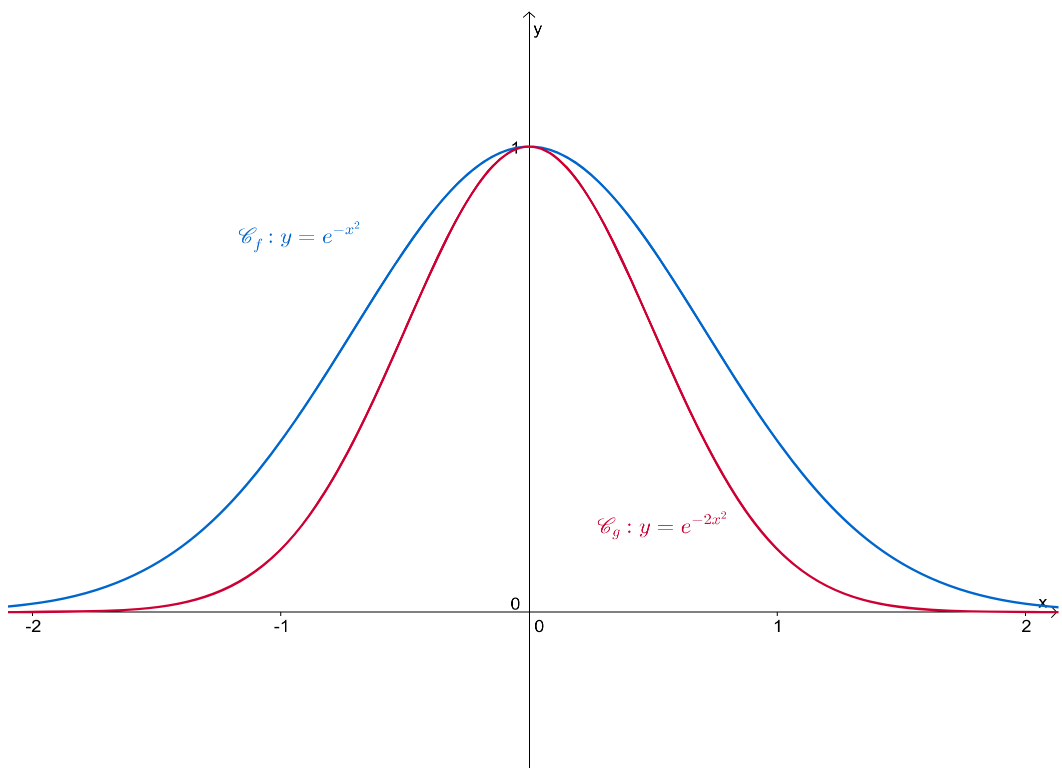
$$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow e^{-2x^2}\left(e^{x^2}-1\right)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-1=0 \Leftrightarrow e^{x^2}=e^0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

Ainsi, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions *f* et *g* respectivement se coupent au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0)=g(0)=e^0=1$.

Par ailleurs, pour tout *x* réel non nul, on a $x^2>0$ et donc $e^{x^2}>e^0$, soit $e^{x^2}-1>0$ et on a, finalement : $f(x)-g(x)>0$.

En définitive, pour tout *x* réel, on a $f(x)-g(x)\geq 0$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x=0$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction *f* est située au-dessus de la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction *g* et elles se coupent en un seul point de coordonnées $(0\,;1)$.



N°51 page 49

a) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$\left(e^x\right)^2 \le \left(\frac{1}{e}\right)^3 \Leftrightarrow e^{2x} \le e^{-3} \Leftrightarrow 2x \le -3 \Leftrightarrow x \le -\frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle : $\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right]$.

b) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{1-x} < e^{2x+2} \Leftrightarrow 1-x < 2x+2 \Leftrightarrow -1 < 3x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle : $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

c) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{7x+4} > e^{4x+7} \Leftrightarrow 7x+4 > 4x+7 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle : $]1\,;+\infty[$.

d) Les exposants ne posent aucun problème de définition. On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}$.

$$e^{5x-8} \ge \sqrt{e} \Leftrightarrow e^{5x-8} \ge e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5x-8 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x \ge \frac{17}{2} \Leftrightarrow x \ge \frac{17}{10}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle : $\left[\frac{17}{10}\,;+\infty\right[$.

N°60 page 50

a) Bien que ce ne soit pas demandé, nous justifions rapidement la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$:

- La fonction $x \mapsto 5$ est une fonction constante. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur l'intervalle $[0\,;3]$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}(x-4)$ est une fonction affine. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur l'intervalle $[0\,;3]$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur l'intervalle $[0\,;3]$.

  La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}(x-4)e^x$ est donc dérivable sur l'intervalle $[0\,;3]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
- Finalement, la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;3]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel *x*, on a :

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{4}\left[1\times e^x + (x-4)\times e^x\right] = \frac{1}{4}(x-3)e^x$$

Comme l'exponentielle prend des valeurs strictement positives, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-3$. Or, on a : $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$.
Ainsi, sur $[0\,;3[$, on a $f'(x)<0$. Par ailleurs : $f'(3)=0$.
On en déduit finalement :

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } [0\,;3].}$

b) L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point D d'abscisse 0 s'écrit :

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0) = f'(0)\times x + f(0)$$

On a : $f'(0)=\dfrac{1}{4}(0-3)e^0=-\dfrac{3}{4}$ et $f(0)=5+\dfrac{1}{4}(0-4)e^0=5-1=4$.

D'où l'équation : $y=-\dfrac{3}{4}x+4$.

Pour $x=2$, on a : $-\dfrac{3}{4}x+4=-\dfrac{3}{4}\times 2+4=-\dfrac{3}{2}+4=\dfrac{5}{2}$. Ainsi :

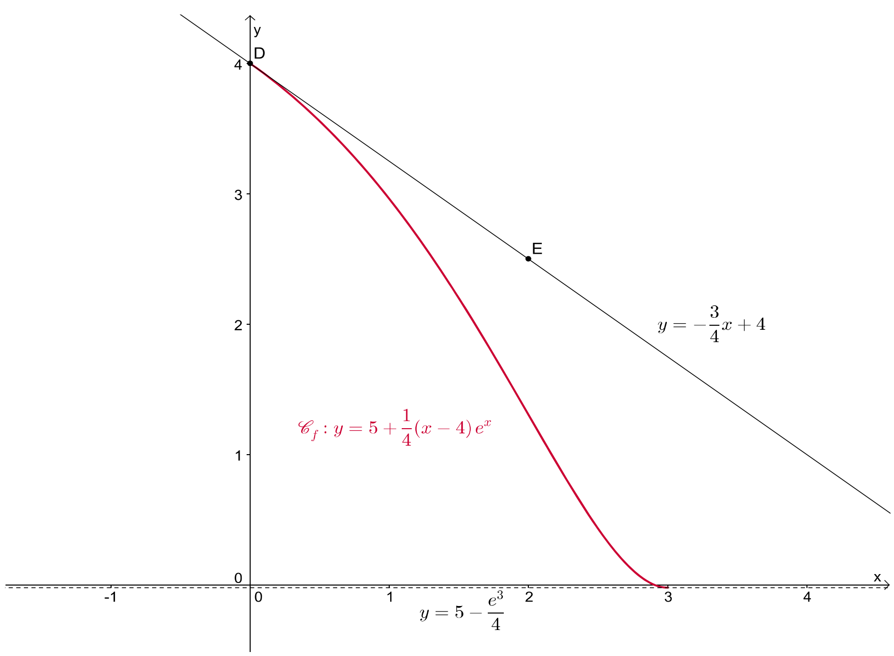
$\boxed{\text{Le point E appartient à la tangente à } \mathscr{C} \text{ au point D.}}$

c) D'après la question a), nous savons que l'on a : $f'(3)=0$. Ainsi, nous pouvons immédiatement conclure que la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 3 une tangente horizontale (c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses).

Mais on a par ailleurs : $f(0)=5+\dfrac{1}{4}(3-4)e^3=5-\dfrac{1}{4}e^3\simeq -0,02\neq 0$.

Ainsi, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3 est $y=5-\dfrac{1}{4}e^3$.

$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C} \text{ au point d'abscisse 3 n'est pas l'axe des abscisses.}}$



N°81 page 55

1. a) On dérive la fonction *f* comme produit des fonctions *u* et *v* suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$:

- $u(x) = x^2 - x + 1$ qui donne : $u'(x) = 2x - 1$.
- $v(x) = e^{-x}$ qui donne : $v'(x) = -e^{-x}$.

Pour tout *x* réel, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2x-1)\times e^{-x} + (x^2 - x + 1)\times(-e^{-x}) \\ &= (2x - 1 - x^2 + x - 1)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 3x - 2)e^{-x} \end{aligned}$$

Pour tout *x* réel, $f'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x}$

b) Pour pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction *f*, nous allons commencer par en étudier les variations.
Disposant de la dérivée, nous étudions le signe de $f'(x)$.

La fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 3x - 2$. En remarquant que 1 est racine évidente (la somme des coefficients est nulle) ou en calculant les racines à l'aide du discriminant, on obtient facilement la factorisation : $-x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$.

Le coefficient de « x^2 » est négatif (il vaut -1). On en déduit :

- Pour tout *x* réel dans $]1 ; 2[$, on a $f'(x) > 0$.
- Pour tout *x* réel dans $]-\infty ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, on a $f'(x) < 0$.
- $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction *f* est donc

- strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
- strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty ; 1]$ et $[2 ; +\infty[$.

On a enfin : $f(1) = (1^2 - 1 + 1)e^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et $f(2) = (2^2 - 2 + 1)e^{-2} = 3e^{-2} = \dfrac{3}{e^2}$.

Les éléments précédents nous permettent de dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (cf. page suivante).

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^2}$	$\searrow$	

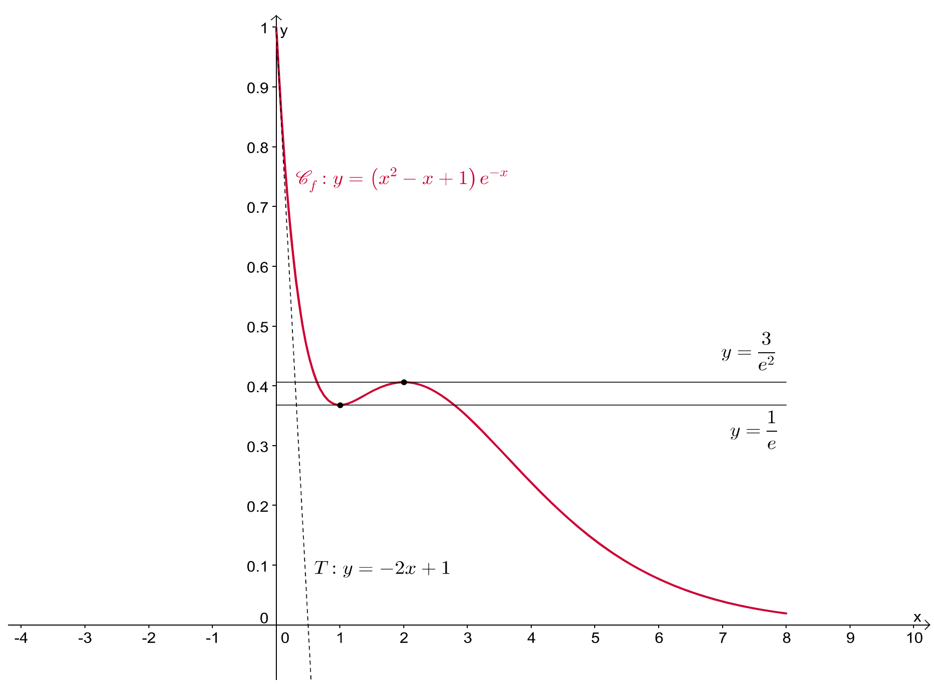
2. L'équation réduite de la tangent à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 s'écrit :

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0) = f'(0)\times x + f(0)$$

On a : $f'(0) = \left(-0^2+3\times 0-2\right)e^{-0} = -2$ et $f(0) = \left(0^2-0+1\right)e^{-0} = 1$.
D'où l'équation réduite : $y = -2x+1$.

$$\boxed{\text{L'équation réduite de la tangente T à } \mathscr{C}_f \text{ au point d'abscisse 0 est : } y=-2x+1}$$

3. Nous avons complété le graphique demandé en traçant, toujours sur le seul intervalle $[0;8]$, les tangentes horizontales d'équations respectives $y=\dfrac{1}{e}$ et $y=\dfrac{3}{e^2}$.



4. a) En traçant la droite horizontale d'équation $y = 0,4$ il semble que le nombre de points d'intersection avec la courbe $\mathscr{C}_f$ soit égal à 3.

L'équation $f(x) = 0,4$ semble admettre 3 solutions sur l'intervalle $[0\,;8]$.

Remarque : à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, vous êtes parfaitement à même de démontrer cette conjecture.

5. A l'aide de la calculatrice, on obtient facilement :

La plus grande des solutions de l'équation $f(x) = 0,4$ sur l'intervalle $[0\,;8]$ est environ égale à 2,30 (valeur arrondie au centième).