Lycée Fénelon Sainte-Marie

Préparation Science-Po/Prépa HEC

Fonctions

Version du 2 juillet 2015

Exercice 1 – 2nd degré : racines et coefficients

On rappelle que si l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) admet deux racines α et β (éventuellement confondues) alors ces deux réels vérifient :

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ et } \alpha\,\beta=\frac{c}{a}$$

On considère l'équation $2x^2+3x-1=0$.

1. Vérifier qu'elle admet deux solutions distinctes α et β.
2. Sans déterminer les valeurs exactes de α et β, calculer :

$$\alpha^2+\beta^2,\ \left(\alpha-\beta\right)^2,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \text{ et } \frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}$$

3. Déterminer toutes les équations du second degré admettant pour racines $\dfrac{\alpha}{\alpha^2-1}$ et $\dfrac{\beta}{\beta^2-1}$.

Exercice 2 – 2nd degré : une famille de paraboles

Pour tout réel *m* différent de 2, on considère la parabole $\mathscr{P}_m$ d'équation :

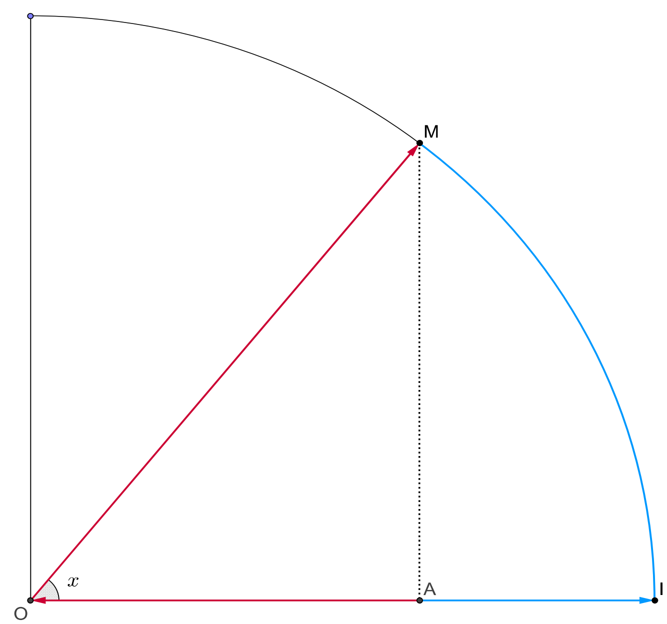
$$y=\left(m-2\right)x^2+5x+7-m$$

1. Montrer qu'il existe exactement deux points, A et B, appartenant à toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$.
2. Déterminer le lieu $\mathscr{C}$ des sommets des paraboles $\mathscr{P}_m$.
3. Vérifier que les points A et B appartiennent à $\mathscr{C}$ et donner les équations des paraboles dont les points A et B sont les sommets.

4. On pose $f : x \mapsto \frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}$.
   a. Etudier les limites de *f* aux bornes de son domaine de définition.
   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{5}{2}(x+2)$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction *f* et étudier leur position relative.
   (on rappelle que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si on a :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$))
   c. On note I le point d'intersection des deux asymptotes obtenues aux questions précédentes.
   Montrer que la courbe représentative de la fonction *f* est symétrique par rapport à I puis montrer que la famille des paraboles $\mathscr{P}_m$ est symétrique par rapport à I (on montrera que pour tout réel *m* différent de 2, il existe un unique réel m' différent de 2 tel que les paraboles $\mathscr{P}_m$ et $\mathscr{P}_{m'}$ soient symétriques par rapport à I).

Exercice 3 – A qui de prendre le quart ?

On considère la figure suivante :



Le point M est un point du quart de cercle tel que $\widehat{\mathrm{IOM}} = x$ radians.

Pour quelle valeur de *x* les trajets AIM et AOM sont-ils de même longueur ?

Exercice 4 – Un encadrement

Montrer que pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$, on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} \leq 0$$

Exercice 5 – L'inégalité de Bernoulli

Montrer que pour tout réel positif et tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on a :

$$x^n - 1 \geq n(x-1)$$

Exercice 6 – Approximations

A l'aide d'approximations affines de fonctions judicieusement choisies, donner des valeurs approchées de $\sqrt{38}$ et $\frac{1}{9,8}$. Dans chaque cas, on donnera l'erreur relative commise.

Exercice 7 – To be tangent or not to be tangent ? That's the question !

La droite d'équation $y = 5x - 1$ est-elle tangente à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - 4$?

Exercice 8 – Tangentes communes

1. Déterminer les tangentes communes aux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $y = x^2 + 2x + 3$ et $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$.
2. Représenter graphiquement les paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ainsi que les tangentes obtenues.

Exercice 9 – Raccordement

On considère une parabole $\mathscr{P}_1$ vérifiant :

- $\mathrm{O}(0\,;0) \in \mathscr{P}_1$.
- $\mathrm{I}(4\,;2) \in \mathscr{P}_1$.
- La tangente à $\mathscr{P}_1$ en O est horizontale.

On considère une parabole $\mathscr{P}_2$ vérifiant :

- $\mathrm{I}(4\,;2) \in \mathscr{P}_2$.
- $\mathrm{A}(8\,;0) \in \mathscr{P}_2$.

1. Déterminer des équations des paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de sorte qu'elles admettent une tangente commune en I.
2. Représenter graphiquement $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et la tangente commune en I.

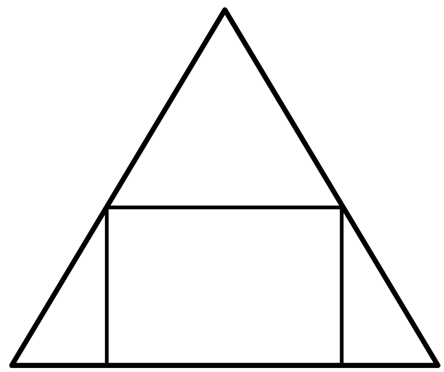
Exercice 10 – Définition géométrique de la parabole

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = 2ax^2$ ($a > 0$).
Pour tout $\alpha \neq 0$, on considère la droite d'équation $x = \alpha$. Elle coupe la parabole $\mathscr{P}$ au point M_α.On note $\mathscr{T}_\alpha$ et $\mathscr{N}_\alpha$ respectivement la tangente et la normale à $\mathscr{P}$ en M_α.

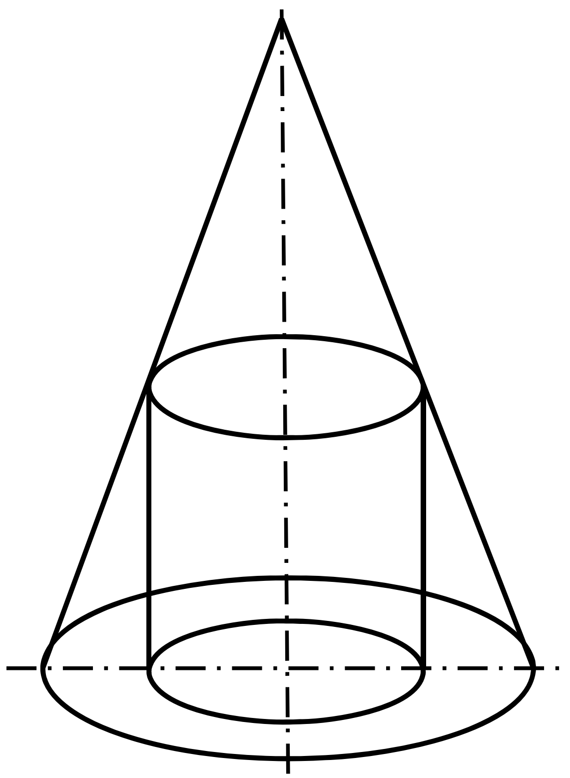
1. Donner les équations réduites des droites $\mathscr{T}_\alpha$ et $\mathscr{N}_\alpha$.
2. Soit $\mathscr{R}_\alpha$ la droite symétrique de la droite $\mathscr{T}_\alpha$ par rapport à la droite $\mathscr{N}_\alpha$.
   Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{R}_\alpha$.
   Indication : on pourra considérer le point $\mathrm{H}(\alpha\,;0)$.
3. Montrer que toutes les droites $\mathscr{R}_\alpha$, quand α varie dans $\mathbb{R}^*$, passent par un même point F dont on précisera les coordonnées.
4. Soit Δ la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{8a}$.
   Soit le point P, projeté orthogonal du point M sur la droite Δ.
   Comparer MF et MP.

Exercice 11 – 2D ou 3D ?

1. Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire, comme l'indique la figure ci-dessous, dans un triangle isocèle de hauteur 10 cm et de base 12 cm ?



2. Quel est le diamètre du cylindre de volume maximum que l'on peut inscrire, comme l'indique la figure ci-dessous, dans un cône de révolution de hauteur 10 cm et de base de diamètre 12 cm ?



Corrigés

Exercice 1 – 2nd degré : racines et coefficients

On considère l'équation $2x^2+3x-1=0$.

1. Le discriminant Δ associé au trinôme $2x^2+3x-1$ vaut : $\Delta=3^2-4\times2\times(-1)=9+8=17$.
   Puisqu'il est strictement positif, l'équation considérée admet bien deux solutions distinctes.

L'équation $2x^2+3x-1=0$ admet deux racines distinctes.

2. L'idée générale, dans ce genre de question est de faire apparaître la somme et le produit des deux racines du trinôme $2x^2+3x-1$. On a en effet : $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$ et $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$.
   On a alors :

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=\frac{13}{4}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4}+1=\frac{17}{4}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{-\frac{3}{2}-2}{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)+1}=\frac{-\frac{7}{2}}{2}=-\frac{7}{4}$$

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{13}{4}$, $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{17}{4}$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=-\dfrac{7}{4}$

3. On a :

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{\beta}{\beta^2-1}=\frac{\alpha(\beta^2-1)+\beta(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}=\frac{\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha-\beta}{\alpha^2\beta^2-\alpha^2-\beta^2+1}$$

$$=\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)+1}=\frac{(\alpha\beta-1)(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)+1}$$

En tenant compte de $\alpha^2+\beta^2=\frac{13}{4}$ (résultat obtenu à la question précédente), il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{\beta}{\beta^2-1}&=\frac{(\alpha\beta-1)(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)+1}\\&=\frac{\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}+1}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}-\frac{13}{4}+1}=\frac{\frac{9}{4}}{-3+1}=\frac{\frac{9}{4}}{-2}\\&=-\frac{9}{8}\end{aligned}$$

Il vient ensuite :

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\times\frac{\beta}{\beta^2-1}=\frac{\alpha\beta}{\left(\alpha^2-1\right)\left(\beta^2-1\right)}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-2}=\frac{1}{4}$$

Soit alors $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) une équation du second degré admettant $\frac{\alpha}{\alpha^2-1}$ et $\frac{\beta}{\beta^2-1}$ pour racines.

On a : $\frac{\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{\beta}{\beta^2-1}=-\frac{9}{8}=-\frac{b}{a}$. D'où : $b=\frac{9}{8}a$.

Par ailleurs : $\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\times\frac{\beta}{\beta^2-1}=\frac{1}{4}=\frac{c}{a}$. D'où : $c=\frac{1}{4}a$.

L'équation est donc de la forme : $ax^2+\frac{9}{8}ax+\frac{1}{4}a=0$ soit $\frac{1}{8}a\left(8x^2+9x+2\right)=0$ soit encore, *a* pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle : $a\left(8x^2+9x+2\right)=0$.

> Les équations du second degré admettant $\frac{\alpha}{\alpha^2-1}$ et $\frac{\beta}{\beta^2-1}$ pour racines
>
> sont les équations de la forme :
>
> $$a\left(8x^2+9x+2\right)=0$$
>
> où *a* est un réel non nul.

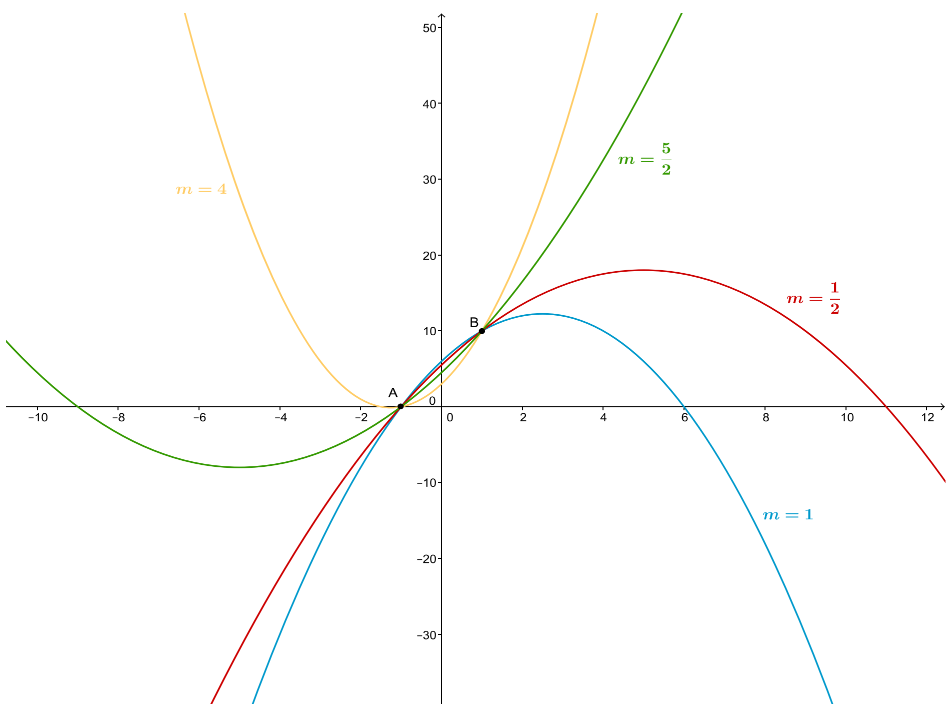
Exercice 2 – 2$^{\text{nd}}$ degré : une famille de paraboles

1. Soit $\mathrm{M}(\alpha\,;\beta)$ un point du pan. Ce point appartient à toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$ si, et seulement si :

$$\forall m \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ \mathrm{M}(\alpha\,;\beta)\in\mathscr{P}_m$$
$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ \beta=(m-2)\alpha^2+5\alpha+7-m$$
$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ (\alpha^2-1)m+(-2\alpha^2+5\alpha+7-\beta)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-1=0 \\ -2\alpha^2+5\alpha+7-\beta=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)(\alpha+1)=0 \\ -2\alpha^2+5\alpha+7-\beta=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \text{ ou } \alpha=1 \\ \beta=-2\alpha^2+5\alpha+7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha\,;\beta)=(-1\,;0) \text{ ou } (\alpha\,;\beta)=(1\,;10)$$

$$\boxed{\text{Les paraboles } \mathscr{P}_m \text{ passent toutes par les points } \mathrm{A}(-1\,;0) \text{ et } \mathrm{B}(1\,;10).}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les représentations graphique des paraboles $\mathscr{P}_{\frac{1}{2}}$ (en rouge), $\mathscr{P}_1$ (en bleu), $\mathscr{P}_4$ (en jaune) et $\mathscr{P}_{\frac{5}{2}}$ (en vert). On a également fait apparaître les points $\mathrm{A}(-1\,;0)$ et $\mathrm{B}(1\,;10)$.



2. On a vu que toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$ passaient par le point $\mathrm{A}\left(-1\,;0\right)$. En d'autres termes, toutes les équations $\left(m-2\right)x^2+5x+7-m=0$ admettent comme racine -1. On sait que le produit des racines vaut $\dfrac{7-m}{m-2}$. Pour m fixé différent de 2, l'autre racine de l'équation vaut donc $\dfrac{m-7}{m-2}$. Ainsi, le sommet de la parabole d'équation $y=\left(m-2\right)x^2+5x+7-m$ admet pour abscisse : $x_S=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{m-7}{m-2}\right)=\dfrac{-5}{2\left(m-2\right)}$. On remarque immédiatement que x_S ne peut être nul (le numérateur de la fraction ne peut l'être).
On pouvait bien sûr obtenir directement ce résultat en utilisant le fait que, plus généralement, l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ vaut $-\dfrac{b}{2a}$.

L'ordonnée du sommet de la parabole $\mathscr{P}_m$ vaut alors :

$$\begin{aligned}
y_S&=\left(m-2\right)\times\left(\frac{-5}{2\left(m-2\right)}\right)^2+5\times\left(\frac{-5}{2\left(m-2\right)}\right)+7-m\\
&=\left(m-2\right)\times\frac{25}{4\left(m-2\right)^2}-\frac{25}{2\left(m-2\right)}+7-m\\
&=\frac{25}{4\left(m-2\right)}-\frac{25}{2\left(m-2\right)}+7-m\\
&=-\frac{25}{4\left(m-2\right)}+7-m\\
&=\frac{-25+4\left(m-2\right)\left(7-m\right)}{4\left(m-2\right)}\\
&=\frac{-4m^2+36m-81}{4\left(m-2\right)}
\end{aligned}$$

On va maintenant chercher à éliminer le paramètre m entre x_S et y_S.

Nous allons « travailler » l'expression de y_S qui est plus complexe.
On a : $y_S=\dfrac{-4m^2+36m-81}{4\left(m-2\right)}=\dfrac{1}{4\left(m-2\right)}\times\left(-4m^2+36m-81\right)$.
Comme $x_S=\dfrac{-5}{2\left(m-2\right)}$, il vient immédiatement : $\dfrac{1}{4\left(m-2\right)}=-\dfrac{x_S}{10}$.
Mais il en découle aussi : $\dfrac{1}{m-2}=-\dfrac{2x_S}{5}$ soit $m=2-\dfrac{5}{2x_S}=\dfrac{4x_S-5}{2x_S}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
-4m^2+36m-81 &= -4\times\left(\frac{4x_S-5}{2x_S}\right)^2+36\times\left(\frac{4x_S-5}{2x_S}\right)-81\\
&= \frac{-\left(4x_S-5\right)^2}{x_S^2}+\frac{18\left(4x_S-5\right)}{x_S}-81\\
&= \frac{-16x_S^2+40x_S-25+72x_S^2-90x_S-81x_S^2}{x_S^2}\\
&= \frac{-25x_S^2-50x_S-25}{x_S^2}=-25\frac{x_S^2+2x_S+1}{x_S^2}\\
&= -25\frac{\left(x_S+1\right)^2}{x_S^2}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{4\left(m-2\right)}\times\left(-4m^2+36m-81\right)\\
&= -\frac{x_S}{10}\times\left(-25\frac{\left(x_S+1\right)^2}{x_S^2}\right)\\
&= \frac{5}{2}\frac{\left(x_S+1\right)^2}{x_S}
\end{aligned}$$

Les sommets des paraboles sont donc situés sur la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\frac{5}{2}\frac{\left(x+1\right)^2}{x}$.

Réciproquement, si on considère un point $\mathrm{S}\left(x\,;\,y\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\frac{5}{2}\frac{\left(x+1\right)^2}{x}$, on peut se demander s'il existe une parabole $\mathscr{P}_m$ de sommet S.

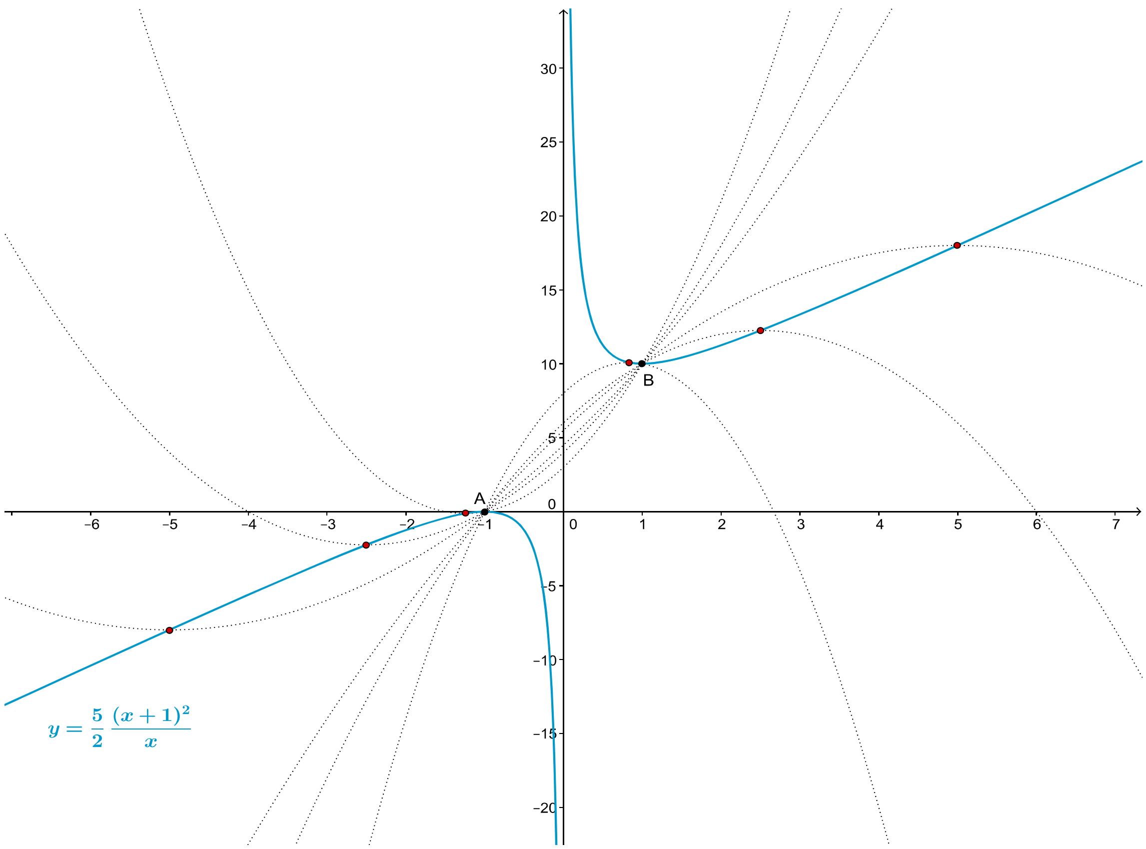
$$\exists m\neq 2\,/\,\mathrm{S}\text{ sommet de }\mathscr{P}_m \Leftrightarrow \exists m\neq 2\,/\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-5}{2\left(m-2\right)}\\[2ex] y=\dfrac{-4m^2+36m-81}{4\left(m-2\right)}\end{array}\right.$$

La première ligne du système est vérifiée pour $m=2-\frac{5}{2x}$. Comme on a $y=\frac{5}{2}\frac{\left(x+1\right)^2}{x}$, on constate alors que la seconde ligne est vérifiée.

En définitive, pour tout point $S(x\,;y)$ de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}$, il existe une unique valeur de *m* telle que $S(x\,;y)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}_m$.

> Le lieu des sommets des paraboles $\mathscr{P}_m$ est la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}$
> et tout point de cette courbe est le sommet d'une parabole $\mathscr{P}_m$.

A titre de complément, nous avons fourni ci-dessous une représentation graphique de quelques paraboles $\mathscr{P}_m$ (en pointillés) pour différentes valeurs de *m*, de leurs sommets (points rouges) et de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}$ (en bleu).



3. Pour $x=-1$, on a immédiatement : $\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{5}{2}\frac{(-1+1)^2}{-1}=0$. Ainsi, le point $A(-1\,;0)$ appartient bien à la courbe $\mathscr{C}$.

Pour $x=1$, on a : $\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{5}{2}\frac{(1+1)^2}{1}=\frac{5}{2}\times 4=10$. Ainsi, le point $\text{B}(1;10)$ appartient bien à la courbe $\mathscr{C}$.

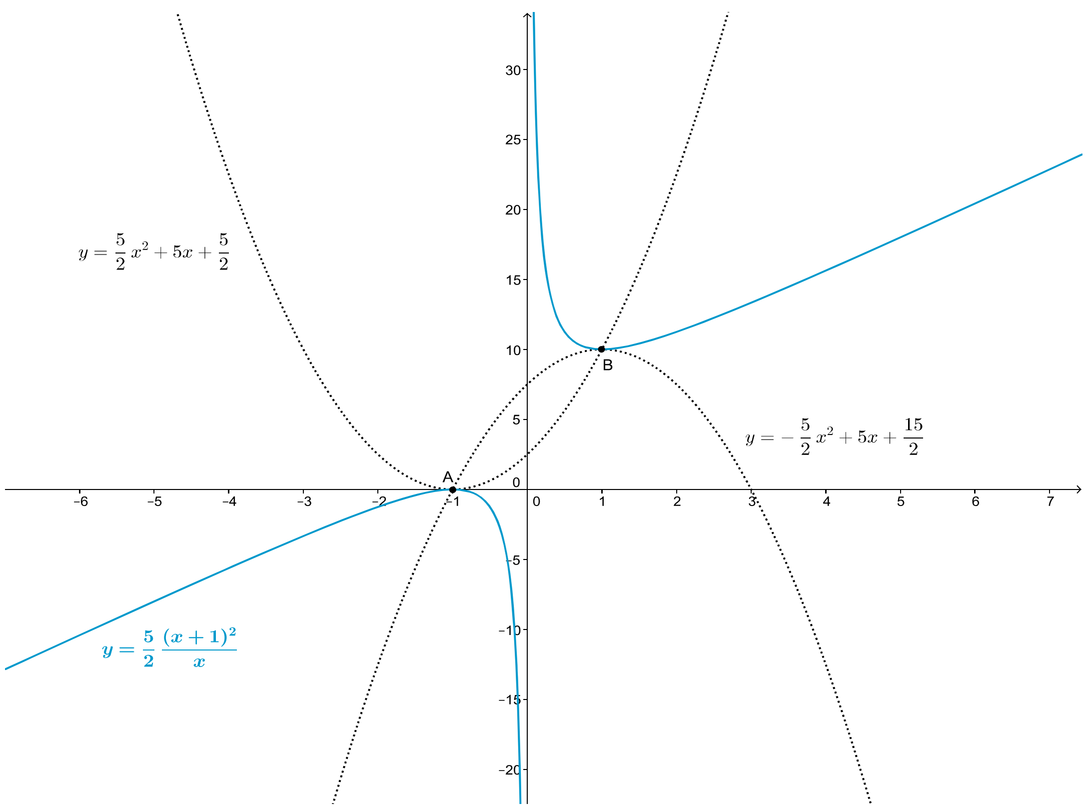
D'après la question précédente, la parabole dont $\text{A}(-1;0)$ est le sommet est la parabole de paramètre $m=2-\frac{5}{2x}=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$.

Il s'agit donc de la parabole d'équation : $y=\frac{5}{2}x^2+5x+\frac{5}{2}$.

De même, la parabole dont B est le sommet est la parabole de paramètre $m=2-\frac{5}{2x}=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$. Il s'agit donc de la parabole d'équation : $y=-\frac{5}{2}x^2+5x+\frac{15}{2}$.

Le points A et B sont les sommets respectifs des paraboles $\mathscr{P}_{\frac{9}{2}}: y=\frac{5}{2}x^2+5x+\frac{5}{2}$ et $\mathscr{P}_{-\frac{1}{2}}: y=-\frac{5}{2}x^2+5x+\frac{15}{2}$.

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ (en bleu) et des paraboles $\mathscr{P}_{\frac{9}{2}}$ et $\mathscr{P}_{-\frac{1}{2}}$ (en pointillés).



4. a. La fonction *f* est une fonction rationnelle et n'est pas définie pour $x = 0$. Son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ est donc : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^* = \left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$.
On va donc chercher les limites de la fonction *f* en 0 (à gauche et à droite), en $-\infty$ et en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2}(x+1)^2\right) = \dfrac{5}{2}$. Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x} = +\infty$.

On en déduit (produit) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

Ensuite, pour tout *x* réel non nul, on a : $f(x) = \dfrac{5}{2}\dfrac{(x+1)^2}{x} = \dfrac{5}{2}\dfrac{x^2+2x+1}{x} = \dfrac{5}{2}\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

On en déduit (somme) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}}$$

Remarque : comme on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$ (une seule limite infinie suffit pour conclure), la courbe représentative de la fonction *f*, c'est-à-dire la courbe $\mathscr{C}$, admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

b. Pour tout *x* réel non nul, on a :

$$f(x) - \frac{5}{2}(x+2) = \frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x} - \frac{5}{2}(x+2) = \frac{5}{2}\frac{(x+1)^2 - x(x+2)}{x} = \frac{5}{2x}$$

On en déduit immédiatement : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \dfrac{5}{2}(x+2)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{2x} = 0$.

On en conclut :

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{5}{2}(x+2)$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$, on étudie le signe de la différence $f(x)-\frac{5}{2}(x+2)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente, de $\frac{5}{2x}$.

Il vient immédiatement :

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, $\frac{5}{2x}<0$ soit $f(x)<\frac{5}{2}(x+2)$: la courbe représentative de la fonction *f* est située sous la droite $\mathscr{D}$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{5}{2x}>0$ soit $f(x)<\frac{5}{2}(x+2)$: la courbe représentative de la fonction *f* est située au-dessus de la droite $\mathscr{D}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, la courbe $\mathscr{C}$ est située sous la droite $\mathscr{D}$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est située au-dessus.

c. La courbe représentative de la fonction *f* admet deux asymptotes : la droite d'équation $x=0$ et la droite d'équation $y=\frac{5}{2}(x+2)$.

Les coordonnées de leur point d'intersection $\mathrm{I}(x\,;y)$ vérifient donc le système

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{5}{2}(x+2) \end{cases}$$

Celui-ci admet comme solution immédiate le couple $(0\,;5)$.

Le point d'intersection des deux asymptotes de la courbe représentative de la fonction *f* est le point $\mathrm{I}(0\,;5)$.

Pour montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport au point I, il suffit de montrer que : pour tout *x* non nul, le point $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, le point $\mathrm{P}(-x\,;-y+10)$ appartient à $\mathscr{C}$.

Pour tout *x* réel non nul, on a :

$$\mathrm{M}(x\,;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow y=\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x} \Leftrightarrow -y+10=-\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2}{x}+10$$

$$\Leftrightarrow -y+10=\frac{5}{2}\left[\frac{(x+1)^2}{-x}+4\right] \Leftrightarrow -y+10=\frac{5}{2}\frac{(x+1)^2-4x}{-x} \Leftrightarrow -y+10=\frac{5}{2}\frac{(x-1)^2}{-x}$$

$$\Leftrightarrow -y+10=\frac{5}{2}\frac{(-x+1)^2}{-x} \Leftrightarrow \mathrm{P}(-x\,;-y+10)\in\mathscr{C}$$

Le résultat est ainsi établi.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction *f* est symétrique par rapport au point $\mathrm{I}(0\,;5)$.

Soit maintenant $\mathscr{P}_m$ et $\mathscr{P}_{m'}$ deux paraboles d'indices *m* et m', différents de 2, respectivement.
$\mathscr{P}_m$ et $\mathscr{P}_{m'}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point $\mathrm{I}(0\,;5)$ si, et seulement si, pour tout *x* réel, le point $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{P}_m$ si, et seulement si, le point $\mathrm{P}(-x\,;-y+10)$ appartient à $\mathscr{P}_{m'}$.

On veut donc : $\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{M}(x\,;y)\in\mathscr{P}_m \Leftrightarrow \mathrm{P}(-x\,;-y+10)\in\mathscr{P}_{m'}$.

On a :

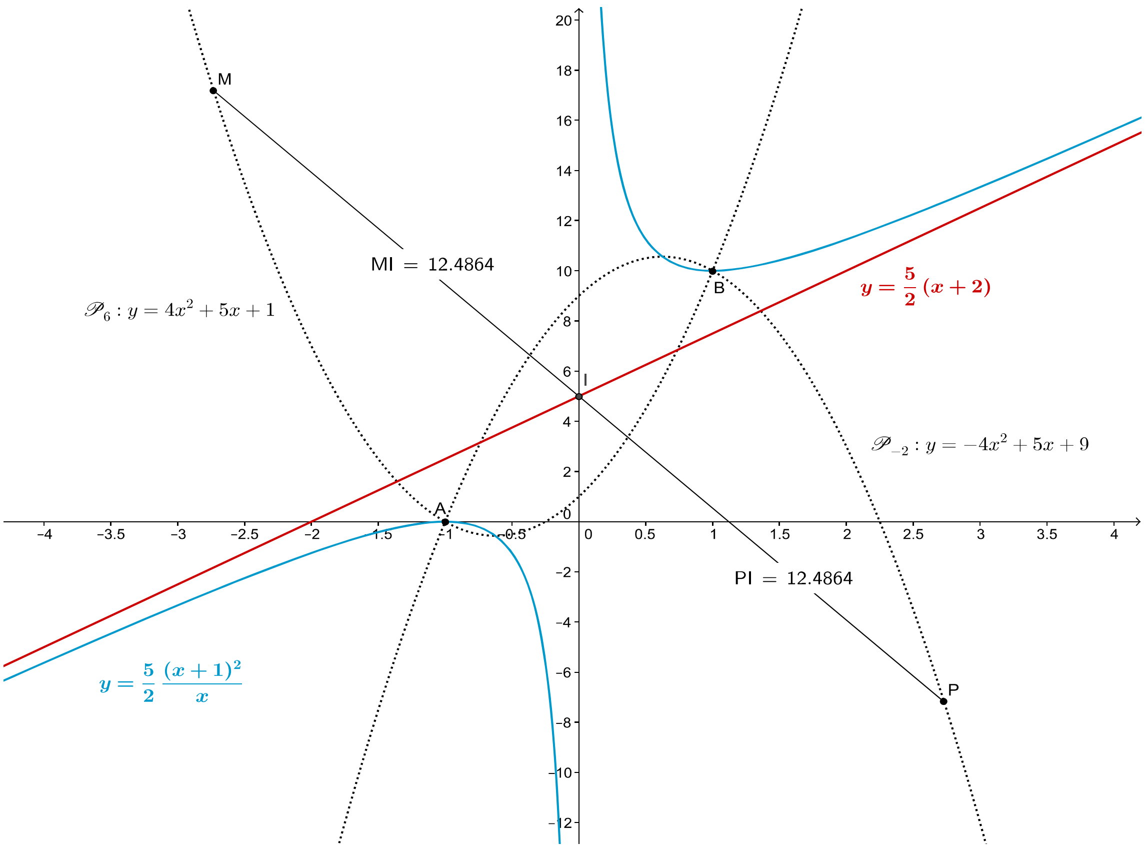
$$\begin{gathered}\mathrm{M}(x\,;y)\in\mathscr{P}_m\\ \Leftrightarrow y=(m-2)x^2+5x+7-m\\ \Leftrightarrow -y+10=(2-m)x^2-5x+m+3\\ \Leftrightarrow -y+10=(2-m)\times(-x)^2+5\times(-x)+m+3\end{gathered}$$

La dernière égalité traduit le fait que le point $\mathrm{P}(-x\,;-y+10)$ appartient à $\mathscr{P}_{m'}$ pour tout *x* réel si, et seulement si, on a : $2-m=m'-2$ et $m+3=7-m'$, c'est-à-dire $m+m'=4$.

On peut finalement conclure :

Pour tout réel *m* différent de 2, la parabole il existe une unique parabole, la parabole $\mathscr{P}_{4-m}$, symétrique de $\mathscr{P}_m$ par rapport au point $\mathrm{I}(0\,;5)$.
La famille des paraboles $\mathscr{P}_m$ est symétrique par rapport au point I.

A titre de complément, nous avons fourni page suivante une représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ (en bleu), de l'asymptote oblique $\mathscr{D}$ (en rouge) et des paraboles $\mathscr{P}_6$ et $\mathscr{P}_{-2}$ symétriques par rapport au point I. Sur la parabole $\mathscr{P}_6$ nous avons fait apparaître un point M et sur la parabole $\mathscr{P}_{-2}$ son symétrique P par rapport à I.



Exercice 3 – A qui de prendre le quart ?

Notons R le rayon du quart de cercle.

Dans le triangle OMA, rectangle en A, on a : $\cos x = \frac{\text{OA}}{\text{OM}} = \frac{\text{OA}}{R}$. Donc : $\text{OA} = R\cos x$.

Ainsi, la longueur $l(\text{AOM})$ du trajet AOM vaut :

$$l(\text{AOM}) = \text{AO} + \text{OM} = R\cos x + R = R(\cos x + 1)$$

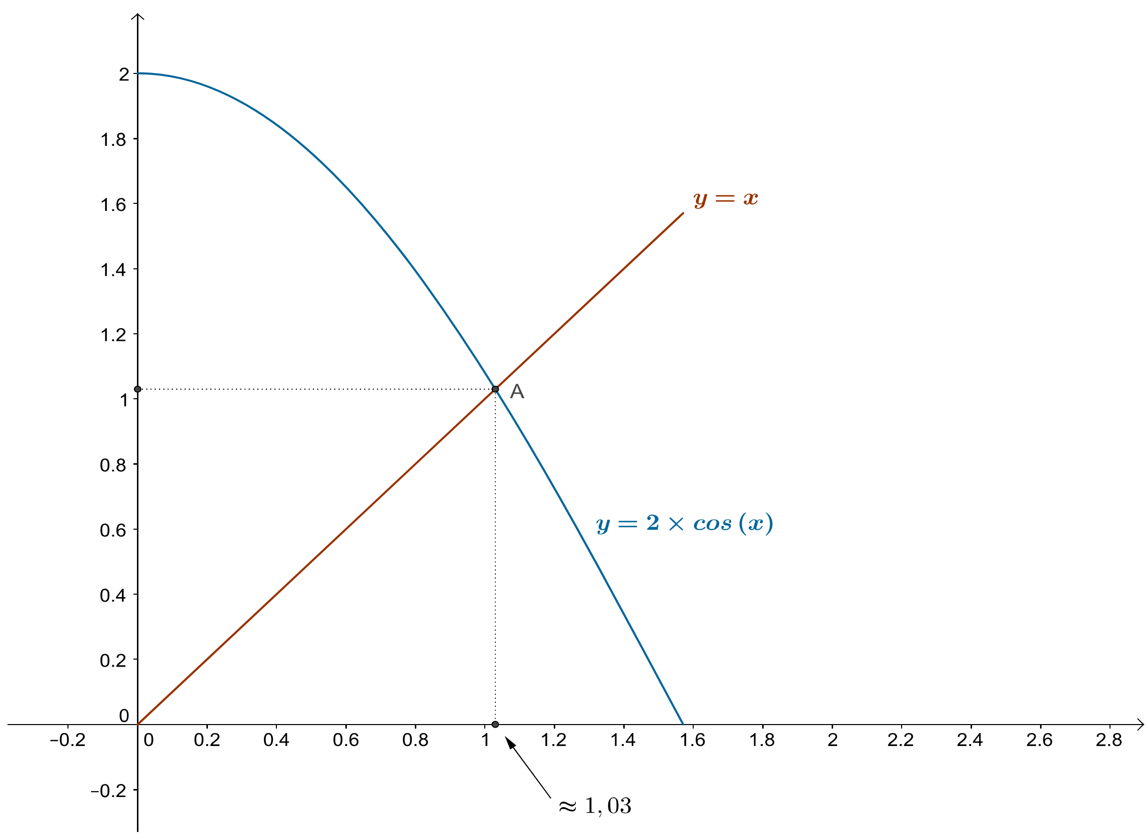
Par ailleurs, l'angle x étant exprimé en radians, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{IM}}$ vaut xR.
Ainsi, la longueur $l(\text{AIM})$ du trajet AIM vaut :

$$l(\text{AIM}) = \text{AI} + \text{IM} = \text{OI} - \text{OA} + IM = R - R\cos x + xR = R(1 - \cos x + x)$$

Les deux trajets ont donc même longueur si, et seulement si :

$$\begin{aligned} & R(\cos x+1)=R(1-\cos x+x) \\ \Leftrightarrow\ & \cos x+1=1-\cos x+x \\ \Leftrightarrow\ & \cos x=-\cos x+x \\ \Leftrightarrow\ & x=2\cos x \end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, en tabulant la fonction $x \mapsto x-2\cos x$ ou à l'aide d'une résolution graphique (G-Solv), on obtient comme unique solution : $1,03$ (valeur approchée à 10^{-2}).



Exercice 4 – Un encadrement

Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$, on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x^3-2x^2}{x^2+1} \leq 0$$

On va considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3-2x^2}{x^2+1}$ définie sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Elle y est dérivable en tant que fonction rationnelle et pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;2]$, on a (dérivée d'un rapport) :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x^2+1)-(x^3-2x^2)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x\left[(3x-4)(x^2+1)-2(x^3-2x^2)\right]}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x\left(3x^3+3x\cancel{-4x^2}-4-2x^3\cancel{+4x^2}\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{x\left(x^3+3x-4\right)}{(x^2+1)^2}$$

Pour tout *x* réel dans l'intervalle $[0\,;2]$, on a immédiatement $\frac{x}{(x^2+1)^2}\geq 0$ et $\frac{x}{(x^2+1)^2}$ ne s'annule que pour $x=0$.

Pour étudier le signe du trinôme x^3+3x-4, on peut remarquer que $x=1$ en est racine.
On a alors facilement : $x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$. Le trinôme x^2+x+4 ne s'annulant pas (discriminant strictement négatif), le signe de x^3+3x-4 est donc celui de $x-1$.
Finalement :

- $f'(0)=f'(1)=0$.
- Si $x\in\,]0\,;1[$, $f'(x)<0$.
- Si $x\in\,]1\,;2]$, $f'(x)>0$.

La fonction *f* est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$. Elle admet donc un minimum en 1 et son maximum est atteint en 0 ou en 2.

On a : $f(0)=\frac{0^3-2\times 0^2}{0^2+1}=0$ et $f(2)=\frac{2^3-2\times 2^2}{2^2+1}=0$. Ainsi, le maximum de *f* sur l'intervalle $[0\,;2]$ vaut 0.

Par ailleurs : $f(1)=\frac{1^3-2\times 1^2}{1^2+1}=-\frac{1}{2}$.

Finalement : $\forall x\in[0\,;2], -\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 0$.

Le résultat est établi.

$$\boxed{\forall x\in[0\,;2], -\frac{1}{2}\leq\frac{x^3-2x^2}{x^2+1}\leq 0}$$

Exercice 5 – L'inégalité de Bernoulli

Notons d'abord que pour $n=1$, l'inégalité est trivialement vérifiée : $x^n-1=x-1$ et $n(x-1)=x-1$.

Nous supposons donc désormais $n>1$.

Pour tout entier naturel *n* strictement supérieur à 1, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par :

$$f_n(x)=x^n-1-n(x-1)$$

La fonction f_n est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynôme et pour tout réel *x* positif, on a :

$$f_n'(x)=n\,x^{n-1}-n=n\left(x^{n-1}-1\right)$$

La fonction $x\mapsto x^{n-1}-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (dérivez-la si vous n'en êtes pas convaincu(e) … ☺) et s'annule en 1. On en déduit immédiatement :

- $\forall x\in[0\,;1[$, on a : $f_n'(x)<0$.
- $f_n'(1)=0$.
- $\forall x\in]1\,;+\infty[$, on a : $f_n'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On en déduit que sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n admet un minimum en $x=1$. Ce minimum vaut : $f_n(1)=1^n-1-n(1-1)=0$.
Ainsi, pour tout *x* réel positif, on a : $f_n(x)=x^n-1-n(x-1)\geq f_n(1)=0$, soit :

$$x^n-1\geq n(x-1)$$

Le résultat est établi.

Exercice 6 – Approximations

→ Valeur approchée de $\sqrt{38}$

Nous considérons la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que nous notons *f* pour pouvoir plus aisément utiliser les notations du cours. Le carré parfait le plus proche de 38 est 36. On peut donc écrire :

$$\sqrt{38}=f(38)\simeq f(36)+f'(36)\times(38-36)$$

On a immédiatement : $f(36)=\sqrt{36}=6$.

Par ailleurs, pour tout réel *x* strictement positif, il vient : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

D'où : $f'(36)=\dfrac{1}{2\sqrt{36}}=\dfrac{1}{12}$.

Il vient alors :

$$\sqrt{38}=f(38)\simeq f(36)+f'(36)\times(38-36)=6+\frac{1}{12}\times 2=6+\frac{1}{6}=\frac{37}{6}$$

L'erreur relative commise vaut : $\dfrac{\frac{37}{6}-\sqrt{38}}{\sqrt{38}}=\dfrac{37}{6\sqrt{38}}-1\simeq 3,65\times 10^{-4}=0,0365\%$.

Bien évidemment, cette erreur est calculée à l'aide d'une calculatrice qui nous fournit directement une valeur très précise de $\sqrt{38}$!

A l'aide de l'approximation affine de la fonction racine carrée en 36, on obtient $\dfrac{37}{6}$ comme valeur approchée de $\sqrt{38}$. On commet ainsi une erreur d'environ 0,0365% (surestimation).

→ Valeur approchée de $\dfrac{1}{9,8}$

On va cette fois travailler avec la fonction inverse, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est un intervalle qui nous intéresse ici car $9,8\in\mathbb{R}_+^*$), que nous notons encore *f*.
10 est « proche » de 9,8 et son inverse est simple.

On peut donc écrire : $\dfrac{1}{9,8}=f(9,8)\simeq f(10)+f'(10)\times(9,8-10)$

On a immédiatement : $f(10)=\dfrac{1}{10}=0,1$.

Par ailleurs, pour tout réel *x* strictement positif, il vient : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

D'où : $f'(10)=-\dfrac{1}{10^2}=-\dfrac{1}{100}=-0,01$.

Il vient alors :

$$\frac{1}{9,8}=f(9,8)\simeq f(10)+f'(10)\times(9,8-10)=0,1-0,01\times(-0,2)=0,1+0,002=0,102$$

Comme $\frac{1}{9,8}=\frac{10}{98}=\frac{5}{49}$ et $0,102=\frac{102}{1\,000}=\frac{51}{500}$, l'erreur relative commise vaut :

$$\frac{\frac{51}{500}-\frac{5}{49}}{\frac{5}{49}}=\frac{\frac{-1}{500\times 49}}{\frac{5}{49}}=\frac{-1}{500\times \cancel{49}}\times\frac{\cancel{49}}{5}=\frac{-1}{2500}=-4\times 10^{-4}=-0,04\%$$

> A l'aide de l'approximation affine de la fonction inverse, on obtient 0,102 comme valeur approchée de $\frac{1}{9,8}$. On commet ainsi une erreur de $-0,04\%$ (sous-estimation).

Exercice 7 – To be tangent or not to be tangent ? That's the question !

La droite d'équation $y=5x-1$ est-elle tangente à la courbe d'équation $y=x^3-x^2-4$?

La courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=x^3-x^2-4$ peut être vue comme la courbe représentative de la fonction $f:x\mapsto x^3-x^2-4$. Il s'agit d'une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f':x\mapsto 3x^2-2x$.

Pour que la droite d'équation $y=5x-1$ soit tangente à la courbe $\mathscr{C}$, il faut (mais ce n'est pas suffisant !) qu'il existe (au moins) une valeur de x telle que $f'(x)=5$.
On doit donc commencer par résoudre : $3x^2-2x=5$.
On montre facilement que l'équation $3x^2-2x-5$ admet pour solutions -1 et $\frac{5}{3}$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 s'écrit :

$$y=f'(-1)\times\big(x-(-1)\big)+f(-1)=5\times(x+1)-6=5x-1$$

On trouve l'équation réduite de la droite proposée dans l'énoncé.

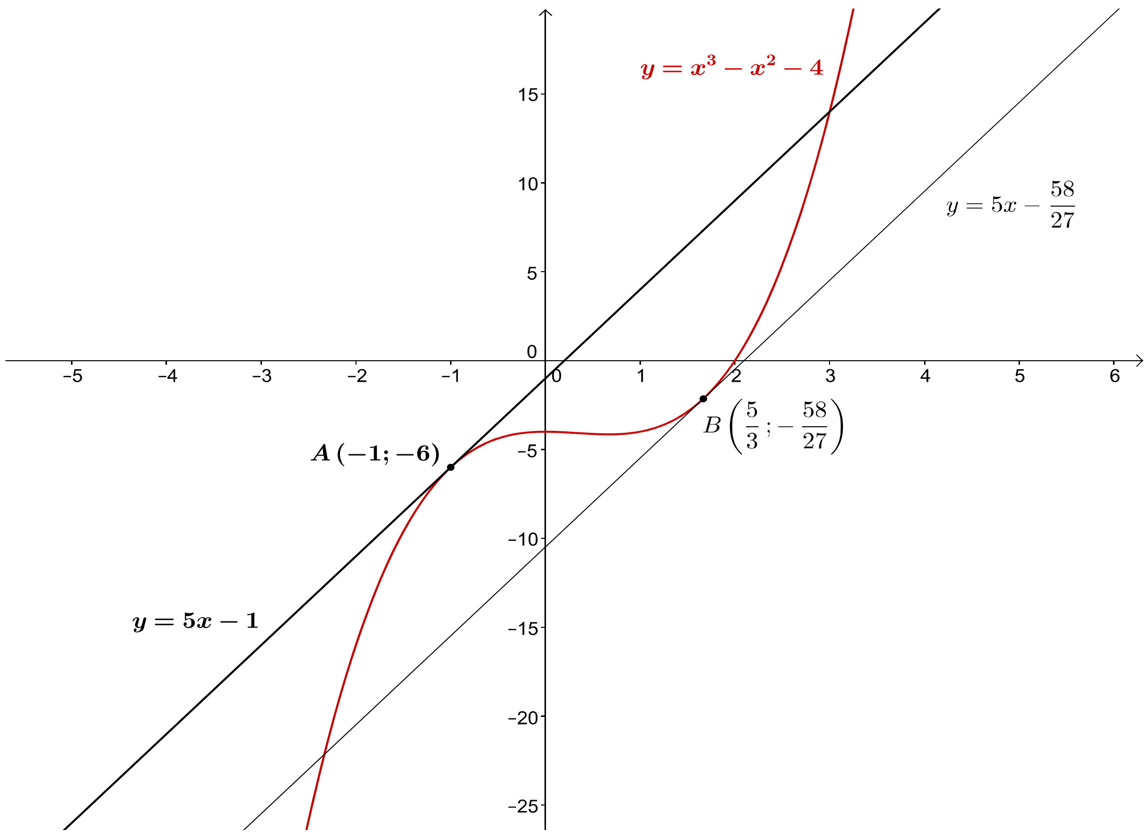
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{5}{3}$ s'écrit :

$$y=f'\left(\frac{5}{3}\right)\times\left(x-\left(\frac{5}{3}\right)\right)+f\left(\frac{5}{3}\right)=5\times\left(x-\frac{5}{3}\right)-\frac{58}{27}=5x-\frac{283}{27}$$

On trouve l'équation d'une droite parallèle à celle de l'énoncé.

Finalement :

> La courbe d'équation $y=x^3-x^2-4$ admet au point $(-1\,;-6)$
> une tangente d'équation réduite $y=5x-1$



Remarque : pour plus de lisibilité, nous avons choisi un repère orthogonal mais non orthonormal.

Exercice 8 – Tangentes communes

1. Soit A et B des points des paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ respectivement tels que la droite (AB) soit tangente paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ en A et B respectivement.

   Comme A appartient à la parabole $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = x^2 + 2x + 3$, ses coordonnées sont de la forme $(a ; a^2 + 2a + 3)$. De façon analogue, les coordonnées de B sont de la forme $\left(b ; -\frac{1}{2}b^2 + 1\right)$.

   La droite (AB) ne peut être verticale puisqu'une parabole ne peut admettre de tangente verticale. On a donc nécessairement $a \neq b$ et le coefficient directeur de la droite (AB) vaut : $\frac{y_\text{B} - y_\text{A}}{x_\text{B} - x_\text{A}} = \frac{-\frac{1}{2}b^2 + 1 - (a^2 + 2a + 3)}{b - a} = \frac{-a^2 - 2a - \frac{1}{2}b^2 - 2}{b - a} = \frac{a^2 + 2a + \frac{1}{2}b^2 + 2}{a - b}$.

La droite (AB) sera alors une tangente commune aux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ si, et seulement si, son coefficient directeur est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}_1$ en A et au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}_2$ en B.

La parabole $\mathscr{P}_1$ d'équation $y = x^2 + 2x + 3$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ de dérivée $x \mapsto 2x + 2$. Au point $(a\,;a^2 + 2a + 3)$, le coefficient directeur de la tangente vaut donc $2a + 2$. On a ainsi une première égalité :

$$\frac{a^2 + 2a + \frac{1}{2}b^2 + 2}{a - b} = 2a + 2$$

La parabole $\mathscr{P}_2$ d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 1$ de dérivée $x \mapsto -x$. Au point $\left(b\,;-\frac{1}{2}b^2 + 1\right)$, le coefficient directeur de la tangente vaut donc $-b$. On a ainsi une deuxième égalité :

$$\frac{a^2 + 2a + \frac{1}{2}b^2 + 2}{a - b} = -b$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 + 2a + \frac{1}{2}b^2 + 2}{a - b} = 2a + 2 \\ \dfrac{a^2 + 2a + \frac{1}{2}b^2 + 2}{a - b} = -b \end{cases}$$

On a immédiatement : $2a + 2 = -b$, soit : $b = -2a - 2$.

On procède alors par substitution :

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2+2a+\frac{1}{2}b^2+2}{a-b}=2a+2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a^2+2a+\frac{1}{2}(-2a-2)^2+2}{a-(-2a-2)}=2a+2\\
\Leftrightarrow\ &a^2+2a+\frac{1}{2}\times 4(a+1)^2+2=2(a+1)\times(3a+2)\\
\Leftrightarrow\ &a^2+2a+2\left(a^2+2a+1\right)+2=2\left(3a^2+5a+2\right)\\
\Leftrightarrow\ &3a^2+6a+4=6a^2+10a+4\\
\Leftrightarrow\ &3a^2+4a=0\\
\Leftrightarrow\ &a(3a+4)=0\\
\Leftrightarrow\ &a=0 \text{ ou } a=-\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Pour $a=0$, on obtient $b=-2\times 0-2=-2$.
Pour $a=-\frac{4}{3}$, on obtient $b=-2\times\left(-\frac{4}{3}\right)-2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$.

Le système admet donc deux couples solutions : $(0\,;-2)$ et $\left(-\frac{4}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

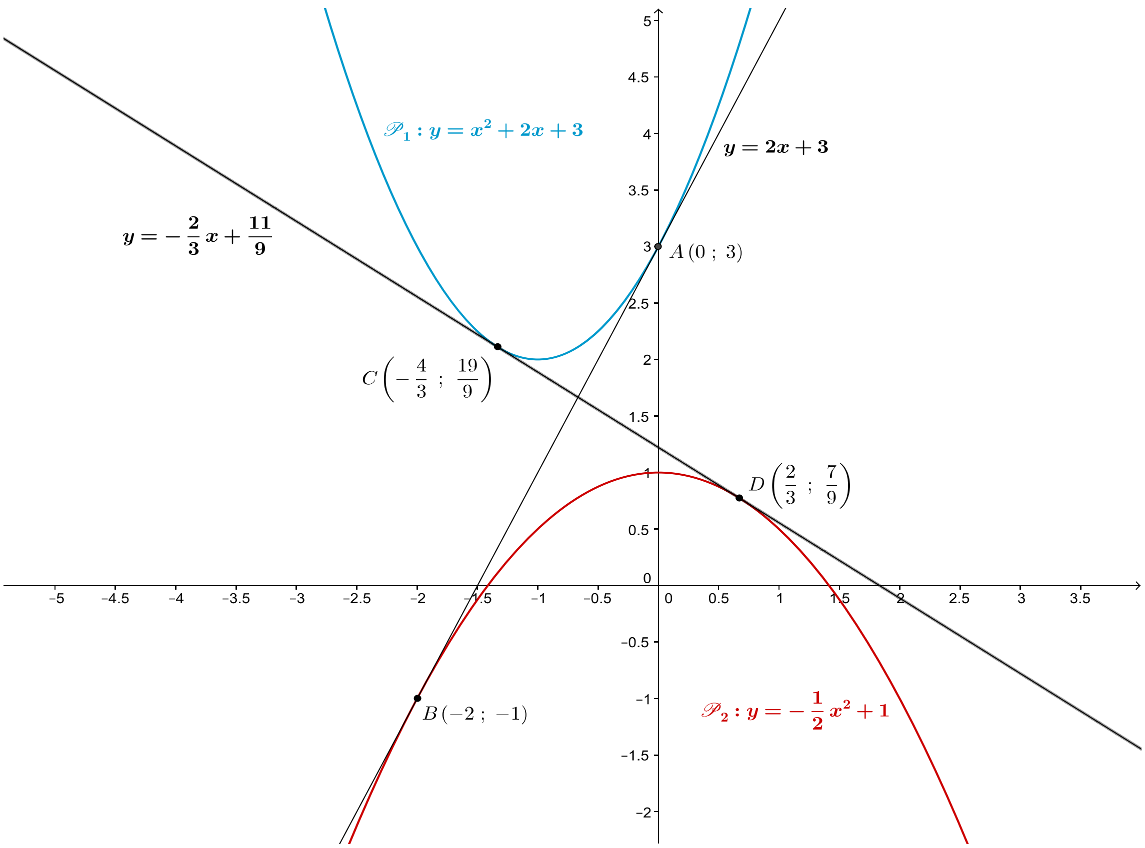
Pour $a=0$, on obtient sur la parabole $\mathscr{P}_1$ le point A de coordonnées $\left(a\,;a^2+2a+3\right)=(0\,;3)$ et pour $b=-2$, on obtient sur la parabole $\mathscr{P}_2$ le point B de coordonnées $\left(b\,;-\frac{1}{2}b^2+1\right)=(-2\,;-1)$.
Comme la pente de la droite (AB) est égale à $-b=-(-2)=2$ alors une équation de cette droite est : $y-y_{\mathrm{A}}=2(x-x_{\mathrm{A}})$, soit $y-3=2(x-0)$. L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit donc : $y=2x+3$.

Pour $a=-\frac{4}{3}$, on obtient sur la parabole $\mathscr{P}_1$ le point C de coordonnées $\left(a\,;a^2+2a+3\right)=\left(-\frac{4}{3}\,;\frac{19}{9}\right)$ et pour $b=\frac{2}{3}$, on obtient sur la parabole $\mathscr{P}_2$ le point D de coordonnées $\left(b\,;-\frac{1}{2}b^2+1\right)=\left(\frac{2}{3}\,;\frac{7}{9}\right)$.

Comme la pente de la droite (CD) est égale à $-b=-\dfrac{2}{3}$ alors une équation de cette droite est : $y-y_{\mathrm{A}}=-\dfrac{2}{3}(x-x_{\mathrm{A}})$, soit $y-\dfrac{19}{9}=-\dfrac{2}{3}\left(x-\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right)$. L'équation réduite de la droite (CD) s'écrit donc : $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{9}$.

Les paraboles $\mathscr{P}_1 : y=x^2+2x+3$ et $\mathscr{P}_2 : y=-\dfrac{1}{2}x^2+1$ admettent deux tangentes communes : les droites d'équations $y=2x+3$ et $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{9}$.

2. On obtient :



Exercice 9 – Raccordement

1. Nous pouvons poser : $\mathscr{P}_1 : y = ax^2 + bx + c$ et $\mathscr{P}_2 : y = a'x^2 + b'x + c'$.

   Comme $\mathrm{O}(0\,;0) \in \mathscr{P}_1$, il vient immédiatement $c = 0$.

   Par ailleurs, le coefficient directeur de la tangente au point de $\mathscr{P}_1$ d'abscisse *x* vaut $2ax + b$. En O, on a $x = 0$ et le coefficient directeur de la tangente en ce point vaut donc *b*. Mais d'après l'énoncé, cette tangente est horizontale et donc de coefficient directeur nul. On a donc $b = 0$. Une équation de $\mathscr{P}_1$ s'écrit donc $y = ax^2$.

   Enfin, comme $\mathrm{I}(4\,;2) \in \mathscr{P}_1$, on a $2 = a \times 4^2$ soit $a = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

   Finalement : $\mathscr{P}_1 : y = \dfrac{1}{8}x^2$.

   Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}_1$ en I vaut donc : $\dfrac{1}{4} \times 4 = 1$.

   Comme $\mathrm{I}(4\,;2) \in \mathscr{P}_2$, on a : $2 = a' \times 4^2 + b' \times 4 + c'$ soit $16a' + 4b' + c' = 2$.

   Comme $\mathrm{A}(8\,;0) \in \mathscr{P}_2$, on a : $0 = a' \times 8^2 + b' \times 8 + c'$ soit $64a' + 8b' + c' = 0$.

   Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}_2$ en I vaut : $2a' \times 4 + b' = 8a' + b'$.

   Puisque l'on souhaite que les tangentes en I à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$ soient confondues, on doit avoir : $8a' + b' = 1$.

   En définitive, les coefficients a', b' et c' vérifient le système :

$$\begin{cases} 16a' + 4b' + c' = 2 \\ 64a' + 8b' + c' = 0 \\ 8a' + b' = 1 \end{cases}$$

   On a :

$$\begin{cases} 16a' + 4b' + c' = 2 \\ 64a' + 8b' + c' = 0 \\ 8a' + b' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a' + 4b' + c' = 2 \\ 8(8a' + b') + c' = 0 \\ 8a' + b' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a' + 4b' + c' = 2 \\ 8 + c' = 0 \\ 8a' + b' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a' + 4b' + c' = 2 \\ c' = -8 \\ 8a' + b' = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a' + 4b' = 10 \\ c' = -8 \\ 8a' = 1 - b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2b' + 4b' = 10 \\ c' = -8 \\ 8a' = 1 - b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b' = 8 \\ c' = -8 \\ 8a' = 1 - b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b' = 4 \\ c' = -8 \\ 8a' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b' = 4 \\ c' = -8 \\ a' = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Finalement : $\mathscr{P}_2 : y = -\dfrac{3}{8}x^2 + 4x - 8$.

La tangente en $\mathrm{I}(4\,;2)$ aux deux paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ admet pour coefficient directeur 1 et, de fait, pour équation réduite $y - 2 = 1\times(x-4)$ soit $y = x - 2$.

Les paraboles $\mathscr{P}_1 : y = \dfrac{1}{8}x^2$ et $\mathscr{P}_2 : y = -\dfrac{3}{8}x^2 + 4x - 8$ admettent au point $\mathrm{I}(4\,;2)$ une tangente commune d'équation $y = x - 2$.

2. On obtient facilement :