Montpellier – Corrigé de l'exercice 1

Pour faciliter la rédaction, nous appellerons « nombres *tierces* », les nombres décrits dans l'énoncé, c'est-à-dire les nombres constitués des seuls chiffres 0, 2 et 8.

Etablissons deux résultats préliminaires généraux sur les nombres *tierces* qui permettront de répondre plus facilement aux questions : une formule pour le nombre de nombres *tierces* possédant exactement n chiffres et une formule pour le nombre de nombres *tierces* possédant au plus n chiffres.

- Il y a 3 nombres *tierces* à 1 chiffre (0, 2 et 8).

Soit $n \geq 2$ un entier naturel non nul.

- Construire un nombre *tierce* à n chiffres (exactement) revient à choisir :
  - son premier chiffre dans l'écriture décimale, soit 2 ou 8 (le 0 n'est pas possible comme premier chiffre car alors il disparaitrait dans l'écriture décimale et le nombre possèderait moins de n chiffres) : il y a donc 2 possibilités ;
  - son deuxième chiffre : il y a 3 possibilités (0, 2 ou 8) ;
  - son troisième chiffre : il y a à nouveau 3 possibilités ;
  - ainsi de suite jusqu'à son $n^{\text{ième}}$ (et dernier) chiffre avec à chaque fois 3 possibilités.

  Finalement , il y a en tout : $2\times\underbrace{3\times3\times...\times3}_{n-1\text{ fois}}$ soit $\boxed{2\times3^{n-1} \text{ nombres } \textit{tierces} \text{ à n chiffres}}$.

- Construire un nombre *tierce* possédant au plus n chiffres se fait de la même manière que ci-dessus sauf que 0 peut être le premier chiffre (dans le cas où le nombre possède strictement moins de n chiffres). il y a donc : $\underbrace{3\times3\times...\times3}_{n\text{ fois}}$ soit $\boxed{3^n \text{ nombres } \textit{tierces} \text{ possédant au plus n chiffres}}$.

  Remarquons qu'alors, $\boxed{3^n \text{ représente aussi le rang du plus grand nombre } \textit{tierce} \text{ à n chiffres}}$.

Nous pouvons alors répondre aux questions :

1. Le plus grand nombre *tierce* contenant exactement un 0, un 2 et un 8 est clairement un nombre à trois chiffres. De plus, le chiffre des centaines est le plus grand possible, soit 8, puis celui des dizaines est le plus grand possible parmi les deux restant (0 et 2) donc 2 et enfin, le chiffre de unité est forcément 0.

   Ainsi, le plus grand nombre *tierce* contenant exactement un 0, un 2 et un 8 est <u>820</u>.

   D'après les résultats préliminaires, il y a $3^2 = 9$ nombres *tierces* possédant 1 ou 2 chiffres et $2\times3^2 = 18$ nombres *tierces* possédant exactement 3 chiffres. Parmi ceux-ci, 9 commencent par 2 et 9 commencent par 8. Le premier nombre tierce de 3 chiffres, commençant par 8 est 800 et est de rang 9 + 9 + 1 = 19. En s'aidant du tableau de l'énoncé, les suivants sont 802 (rang 20), 808 (rang 21) puis 820.

   Ainsi, <u>820 est de rang 22</u>.

2. Le nombre tierce qui s'écrit avec exactement n chiffres 8 est le plus grand nombre tierce possédant exactement n chiffres donc son rang est égal au nombre de nombres *tierces* possédant au plus n chiffres, c'est-à-dire $\boxed{3^n}$.

3. Pour déterminer le rang de 2008, on procède comme dans la première question.
   Il y a $3^3 = 27$ nombres *tierces* possédant 1, 2 ou 3 chiffres et 2008 est $3^{\text{ème}}$ nombre *tierce* possédant exactement 4 chiffres (après 2000 et 2002) donc le rang recherché est 27 + 3 = 30.

   <u>Ainsi, le rang de 2008 est 30</u>.

4. Pour déterminer le nombre *tierce* de rang 2008 que pour appellerons N, procédons par étapes :

- On a $3^6 = 729 < 2008$ et $3^7 = 2187 > 2008$. Comme 3^6 est le rang du plus grand nombre *tierce* à 6 chiffres et 3^7 celui du plus grand nombre *tierce* à 7 chiffres, le nombre N possède 7 chiffres.
- Il y a $2 \times 3^6 = 1458$ nombres *tierces* à 7 chiffres dont les $3^6 = 729$ premiers commencent par 2, donc le rang du premier nombre *tierce* à 7 chiffres commençant par 8 est $3^6 + 3^6 + 1 = 1459 < 2008$. Ceci prouve que le premier chiffre de N est 8.

On continue de la même façon pour déterminer tous les chiffres de N :

- Parmi les nombres *tierces* à 7 chiffres commençant par 8, les $3^5 = 243$ premiers ont 0 pour deuxième chiffre, les 243 suivants ont 2 pour deuxième chiffre. Le dernier de ceux-ci est de rang 1458 + 243 + 243 = 1944 < 2008 donc le deuxième chiffre de N est encore 8.
- Parmi les nombres *tierces* à 7 chiffres commençant par 88, les $3^4 = 81$ premiers ont 0 pour troisième chiffre et le plus grand de ceux-ci est de rang 1944 + 81 = 2025 > 2008 donc N commence par 880.
- Il y a $3^3 = 27$ nombres *tierces* à 7 chiffres commençant par 8800. Le dernier est de rang 1944 + 27 ; les 27 suivants commencent par 8802 et le dernier (qui est 8802888) est de rang 1944 + 27 + 27 = 1998. Et 1998 < 2008, donc le quatrième chiffre de N est 8 (N commence par 8808).
- Il y a $3^2 = 9$ nombres tierces à 7 chiffres commençant par 88080 et le dernier (qui est 8808088) est de rang 1998 + 9 = 2007. N est donc le suivant, soit :

$$\boxed{N = 8808200}.$$