Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 7 de :

$$f(x) = \arcsin(x)$$

Analyse

On va ici utiliser le fait que l'on peut travailler plus simplement sur la dérivée de la fonction.

Résolution

On a : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

On va donc pouvoir utiliser le développement limité « standard » :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right)$$

avec $m = -\dfrac{1}{2}$.

A quel ordre doit-on effectuer ce développement limité ?

Puisque nous allons déterminer le développement limité de la composée des deux fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, le développement limité obtenu ne comportera que des puissances paires de *x*. En l'intégrant, et en tenant compte du fait que $\arcsin(0) = 0$, le développement limité finalement obtenu ne comportera que des puissances impaires de *x*. Pour que x^7 soit présent, il nous faut donc déterminer le développement limité de f' à l'ordre 6 et donc utiliser le développement limité de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ à l'ordre 3.

On a donc :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant x par $-x^2$ (composition des fonctions), il vient :

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\frac{\left(-x^2\right)}{2}+\frac{3\left(-x^2\right)^2}{8}-\frac{5\left(-x^2\right)^3}{16}+\mathrm{o}\left(\left(-x^2\right)^3\right)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\end{aligned}$$

On procède alors à l'intégration de ce développement limité en tenant compte de $\arcsin(0)=0$:

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\mathrm{o}\left(x^7\right)$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 7 de $f(x)=\arcsin\left(x\right)$ s'écrit :

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o\left(x^7\right)$$