Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

Analyse

Il s'agit ici de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions.

Résolution

On note d'abord que f n'est pas définie en 0.
Mais en vertu de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, il vient : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(1) = 0$.

Le terme constant du développement limité de f en 0 est donc nul.

Le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 5 s'écrit : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$

Il vient donc : $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)$.

On considère alors le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'origine à l'ordre 2 puisque les termes de puissance supérieure à 2 fourniraient des puissances de x supérieures ou égales à 6.

On a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

En composant alors les développements limités, on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{72}\right)x^4 + o(x^5) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5)
\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ s'écrit :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$