Déterminer et représenter l'ensemble des points du plan complexe vérifiant l'équation :

$$z+\overline{z}=|z| \quad \text{(E)}$$

Analyse

L'exercice peut être traité de diverses façons. Nous proposons ici trois approches : une approche géométrique (les modules sont identifiés à des distances dans le plan complexe), une approche algébrique et une approche utilisant l'exponentielle complexe.
En guise de préambule, on a tout intérêt à souligner et exploiter une certaine symétrie de l'équation.

Résolution

Préambule

On note d'abord que $z+\overline{z}=2\Re e(z)$. Comme $|z|\geq 0$, on en tire : $\Re e(z)\geq 0$.
En d'autres termes : <u>toute solution de (E) a sa partie réelle positive</u>. La représentation dans le plan complexe de l'ensemble des solutions de (E) est donc incluse dans le demi-plan d'équation $x\geq 0$.

Par ailleurs, en supposant que z est solution de (E), on a :

$$z+\overline{z}=|z| \Leftrightarrow \overline{\overline{z}}+\overline{z}=|\overline{z}| \Leftrightarrow \overline{z} \text{ solution de } (\text{E}).$$

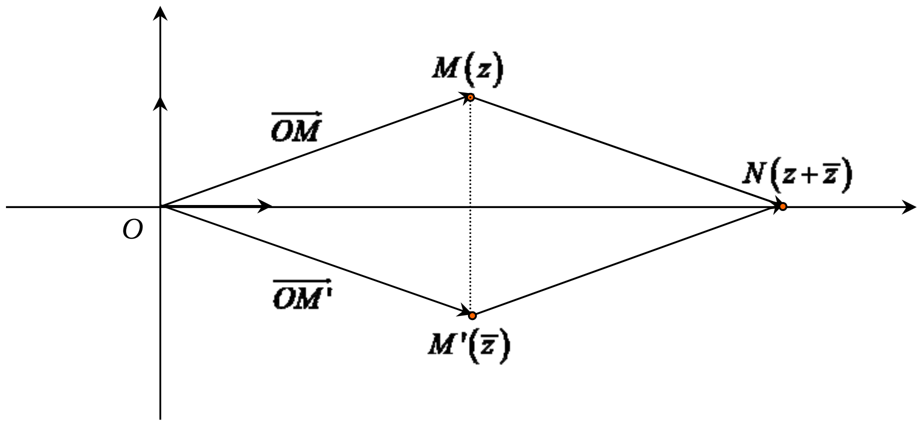
En d'autres termes, <u>la représentation dans le plan complexe de l'ensemble des solutions de (E) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses</u>.

Ces deux résultats ne nous fournissent pas la solution du problème. En revanche, ils constituent d'importantes indications quant aux propriétés de l'ensemble des solutions de l'équation et, de fait, des éléments de vérification intéressants.

1ère approche : approche géométrique

On considère, dans le plan complexe, le point M d'affixe z (qui est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$) et le point M' d'affixe $\overline{z}$ (qui est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$).

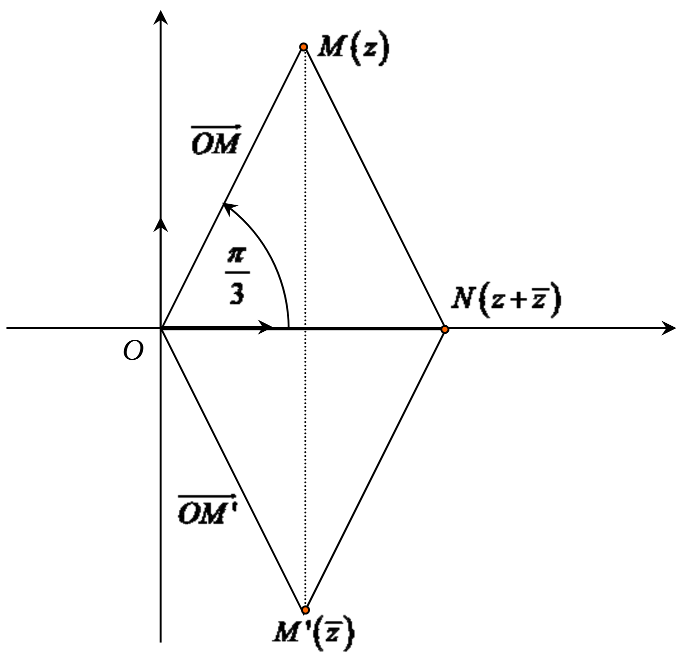
Dans ces conditions, $z+\overline{z}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$ (voir figure ci-après). z et $\overline{z}$ étant conjugués, N est un point se situant sur l'axe des abscisses.



L’équation (E) entraîne alors :

$$\left\|\overrightarrow{ON}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$$

Or, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM'}$, on en tire donc que si z est solution de (E) alors le triangle OMN est équilatéral (voir la figure ci-dessous) :

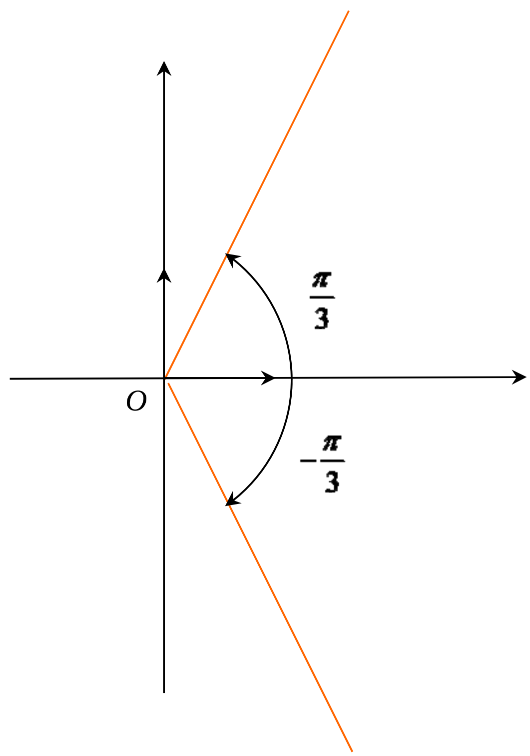


Le triangle OMN étant équilatéral, l’angle $\widehat{NOM}$ admet comme mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

De façon similaire, l’angle $\widehat{NOM'}$ admet comme mesure principale $-\frac{\pi}{3}$.

L'équation $\left\|\overrightarrow{ON}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ nous fournit donc les deux droites passant par l'origine et formant avec l'axe des abscisses des angles de mesure $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

Comme on doit avoir $\Re e(z) \geq 0$, on en déduit finalement que la représentation de l'ensemble des solutions de (E) est formée, dans le plan complexe, des deux demi-droites issues de l'origine, formant avec l'axe des abscisses des angles de mesure $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ et appartenant au demi-plan d'équation $x \geq 0$.



$2^{\text{ème}}$ approche : approche analytique

Ici, on pose $z = x + iy$.

On a alors $z + \bar{z} = 2\Re e(z) = 2x$ et $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. D'où :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\sqrt{3}x - y\right)\left(\sqrt{3}x + y\right) = 0 \end{cases}$$

L'égalité $\left(\sqrt{3}x-y\right)\left(\sqrt{3}x+y\right)=0$ nous donne les deux droites d'équations respectives : $y=\sqrt{3}x$ et $y=-\sqrt{3}x$. La contrainte $x\geq 0$ nous conduit alors à ne retenir, à partir des droites précédentes, que les deux demi-droites issues de l'origine.

3ème approche : utilisation de l'exponentielle complexe

Nous posons ici : $z=re^{i\theta}$ avec $r\geq 0$.

Dans ces conditions, on a : $|z|=r$ et $z+\overline{z}=re^{i\theta}+re^{-i\theta}=r\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=2r\cos\theta$.

Il vient alors :

$$(\mathrm{E})\Leftrightarrow 2r\cos\theta=r\Leftrightarrow\left(r=0 \text{ ou } 2\cos\theta=1\right)\Leftrightarrow\left(r=0 \text{ ou } \cos\theta=\frac{1}{2}\right)$$

La première possibilité, $r=0$, nous fournit le complexe nul comme solution.
La seconde possibilité nous donne : $\theta=\pm\frac{\pi}{3}\ \left(\operatorname{mod} 2\pi\right)$ et les solutions de la forme :

$$z=re^{\pm i\frac{\pi}{3}} \text{ avec } r>0$$

On retrouve les demi-droites obtenues précédemment.

Résultat final

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe vérifie l'équation $z+\overline{z}=|z|$ correspond aux deux demi-droites issues de l'origine, formant avec l'axe des abscisses des angles de mesure $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ et appartenant au demi-plan d'équation $x\geq 0$.