Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n.

Montrer que A est symétrique définie positive si, et seulement si, il existe une matrice réelle carrée d'ordre n inversible B telle que :

$$A = {}^t B . B$$

Analyse

On démontre chacune des implications. On montre que la condition est nécessaire en tirant parti de la diagonalisabilité de A. Le fait que la condition soit suffisante ne pose pas de difficulté particulière mais on notera le rôle déterminant joué par l'inversibilité de B.

Résolution

$\boxed{\Rightarrow}$

En tant que matrice réelle symétrique, A est diagonalisable dans une base orthonormale.
Par ailleurs, puisqu'elle est définie positive, ses valeurs propres, nous les notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sont strictement positives.
Il existe ainsi une matrice réelle orthogonale P telle que :

$$A = PD\,{}^t P = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^t P$$

avec : $\forall i \in [\![1;n]\!], \lambda_i > 0$.

Considérons alors la matrice diagonale :

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

On a immédiatement : $E^2 = D$, ${}^t E = E$ et E inversible puisque ses éléments diagonaux sont non nuls.

On a donc : $A = PD\,{}^tP = PE E\,{}^tP = P\,{}^tE\,E\,{}^tP = {}^t\left(E\,{}^tP\right)\left(E\,{}^tP\right) = {}^tB\,B$.

Or, $B = E\,{}^tP$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

Le résultat est ainsi établi.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons maintenant qu'il existe une matrice réelle inversible B telle que : $A = {}^tB\,B$.

A est alors symétrique puisque l'on a classiquement :

$${}^tA = {}^t\left({}^tB\,B\right) = {}^tB\,{}^t\left({}^tB\right) = {}^tB\,B = A$$

Par ailleurs, pour toute matrice réelle colonne X à *n* lignes :

$${}^tX\,A\,X = {}^tX\,{}^tB\,B\,X = {}^t(B\,X)(B\,X)$$

BX est une matrice colonne à *n* lignes. Posons : $B\,X = (y_i)$.

On a alors classiquement : ${}^tX\,A\,X = {}^t(B\,X)(B\,X) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$.

On en déduit que A est positive.

Enfin, en reprenant les notations précédentes, on a :

$${}^tX\,A\,X = {}^t(B\,X)(B\,X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ y_i = 0 \Leftrightarrow B\,X = 0$$

Or, la matrice B est inversible. On a donc : $B\,X = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
Finalement : ${}^tX\,A\,X = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
La matrice A est définie.

La matrice A est symétrique, définie est positive.
Le résultat est établi.

Résultat final

Une matrice réelle A est symétrique définie positive si, et seulement si, il existe une matrice inversible B telle que $A = {}^tB\,B$.