Soit P un polynôme dont le reste dans la division euclidienne par X^2+1 vaut $2X-2$ et dont le reste dans la division euclidienne par X^2-1 vaut $-4X$.

Quel est le reste de la division euclidienne de P par X^4-1 ?

Analyse

On pose tranquillement les divisions euclidiennes de P par X^2+1, X^2-1 et X^4-1. Le reste de la troisième peut alors être obtenue en choisissant des valeurs judicieuses pour l'indéterminée.

Résolution

La division euclidienne de P par X^2+1 s'écrit :

$$\mathrm{P}(X)=A(X)\times\left(X^2+1\right)+2X-2$$

La division euclidienne de P par X^2-1 s'écrit :

$$\mathrm{P}(X)=B(X)\times\left(X^2-1\right)-4X$$

Enfin, la division euclidienne de P par X^4-1 s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X)&=Q(X)\times\left(X^4-1\right)+aX^3+bX^2+cX+d\\&=Q(X)\times\left(X^2+1\right)\times\left(X^2-1\right)+aX^3+bX^2+cX+d\end{aligned}$$

où *a*, *b*, *c* et *d* sont 4 coefficients réels à déterminer.

On utilise la première division euclidienne en donnant à l'indéterminée les valeurs *i* et $-i$ qui annulent le diviseur X^2+1 :

$$\mathrm{P}(i)=A(i)\times\underbrace{\left(i^2+1\right)}_{=0}+2i-2=2i-2$$

$$\mathrm{P}(-i)=A(-i)\times\underbrace{\left((-i)^2+1\right)}_{=0}-2i-2=-2i-2$$

En utilisant alors la troisième division euclidienne, on obtient :

$$\mathrm{P}(i)=Q(i)\times\underbrace{\left(i^2+1\right)}_{=0}\times\left(i^2-1\right)+a\,i^3+b\,i^2+c\,i+d=-a\,i-b+c\,i+d$$

$$\mathrm{P}(-i)=Q(-i)\times\underbrace{\left((-i)^2+1\right)}_{=0}\times\left((-i)^2-1\right)+a(-i)^3+b(-i)^2+c(-i)+d=a\,i-b-c\,i+d$$

On obtient ainsi un premier couple d'équations :

$$\begin{aligned}&-a\,i-b+c\,i+d=2i-2\\&a\,i-b-c\,i+d=-2i-2\end{aligned}$$

On procède de façon similaire avec la seconde division euclidienne en donnant à l'indéterminée les valeurs 1 et -1 qui annulent le diviseur X^2+1 :

$$\mathrm{P}(1)=B(1)\times\underbrace{\left(1^2-1\right)}_{=0}-4\times1=-4$$

$$\mathrm{P}(-1)=B(-1)\times\underbrace{\left((-1)^2-1\right)}_{=0}-4\times(-1)=4$$

En utilisant alors la troisième division euclidienne, on obtient :

$$\mathrm{P}(1)=Q(1)\times\left(1^2+1\right)\times\underbrace{\left(1^2-1\right)}_{=0}+a\times1^3+b\times1^2+c\times1+d=a+b+c+d$$

$$\mathrm{P}(-1)=Q(-1)\times\left((-1)^2+1\right)\times\underbrace{\left((-1)^2-1\right)}_{=0}+a\times(-1)^3+b\times(-1)^2+c\times(-1)+d=-a+b-c+d$$

On obtient ainsi un deuxième couple d'équations :

$$\begin{aligned}&a+b+c+d=-4\\&-a+b-c+d=4\end{aligned}$$

En définitive, il convient de résoudre le système :

$$\begin{cases}-a\,i-b+c\,i+d=2i-2 & (L_1)\\ a\,i-b-c\,i+d=-2i-2 & (L_2)\\ a+b+c+d=-4 & (L_3)\\ -a+b-c+d=4 & (L_4)\end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} -a\,i - b + c\,i + d = 2i - 2 & (L_1) \\ a\,i - b - c\,i + d = -2i - 2 & (L_2) \\ a + b + c + d = -4 & (L_3) \\ -a + b - c + d = 4 & (L_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 2d = -4 & (L_1)+(L_2) \\ -2a\,i + 2c\,i = 4i & (L_1)-(L_2) \\ 2b + 2d = 0 & (L_3)+(L_4) \\ 2a + 2c = -8 & (L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - d = 2 \\ a - c = -2 \\ b + d = 0 \\ a + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Finalement, le reste de la division euclidienne de P par $X^4 - 1$ s'écrit : $-3X^3 + X^2 - X - 1$.

Résultat final

Si les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme P par $X^2 + 1$ et $X^2 - 1$ valent respectivement $2X - 2$ et $-4X$ alors le reste de la division euclidienne de P par $X^4 - 1$ vaut :

$$-3X^3 + X^2 - X - 1$$