Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et soit A un point extérieur à $\mathscr{C}$.

Déterminer le lieu des centres des cercles tangents au cercle $\mathscr{C}$ et passant par le point A.

Analyse

Ne pas oublier qu'il existe deux types de tangence entre deux cercles …

Résolution

Soit Γ un cercle tangent au cercle $\mathscr{C}$ et passant par le point A. Nous notons Ω le centre de ce cercle.

Rappelons que lorsque deux cercles sont tangents, ils peuvent l'être extérieurement (la distance entre les deux centres est égale à la somme des rayons) ou intérieurement (la distance entre les deux centres est cette fois égale à la valeur absolue de la différence entre les rayons). Dans ce deuxième cas, tous les points de l'un des cercles (sauf le points de tangence) se trouvent à l'intérieur de l'autre cercle.

Ici, le cercle Γ ne peut être à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$ car alors il ne pourrait passer par le point A, extérieur à $\mathscr{C}$.

On va donc distinguer deux cas, suivant que le cercle $\mathscr{C}$ est tangent extérieurement ou intérieurement au cercle Γ. Les deux figures ci-après illustrent ces deux situations.

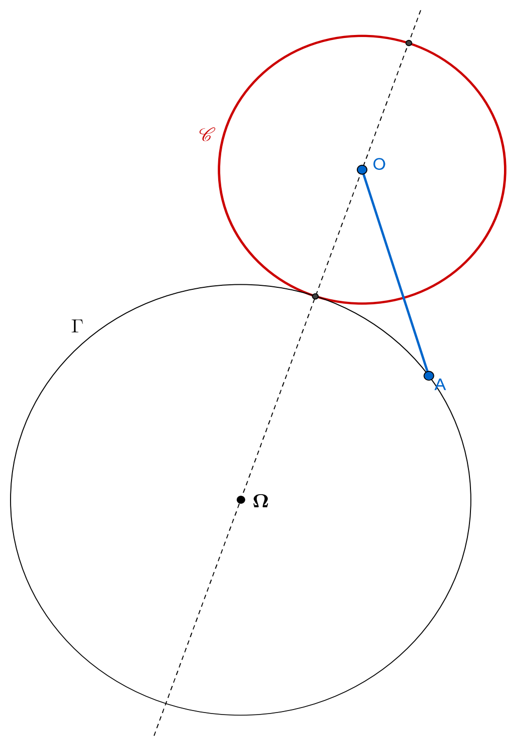


Figure 1. Les deux cercles sont tangents extérieurement.

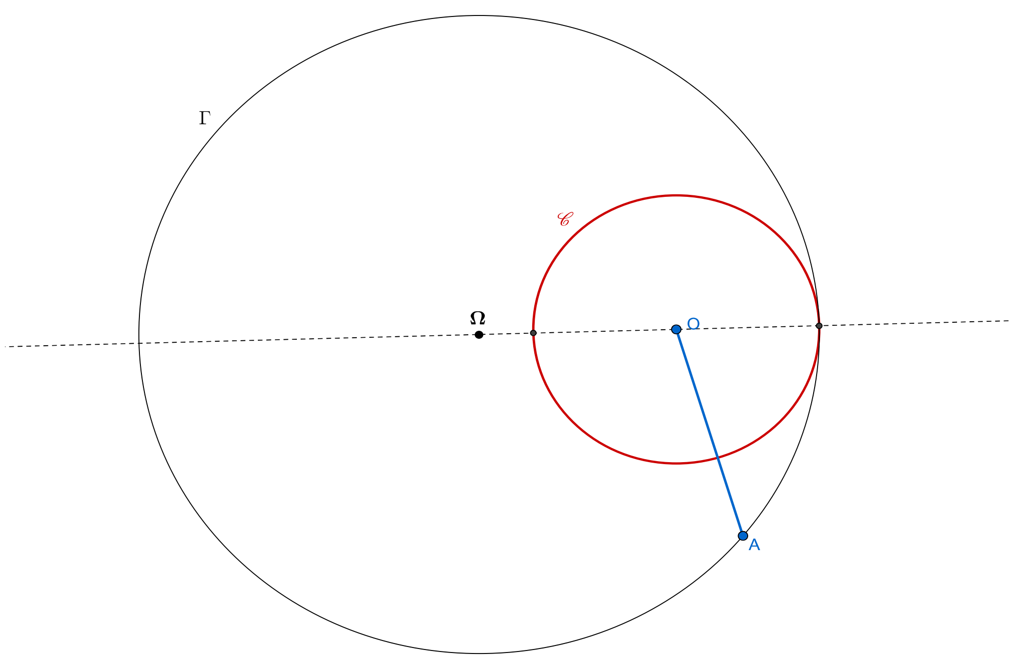


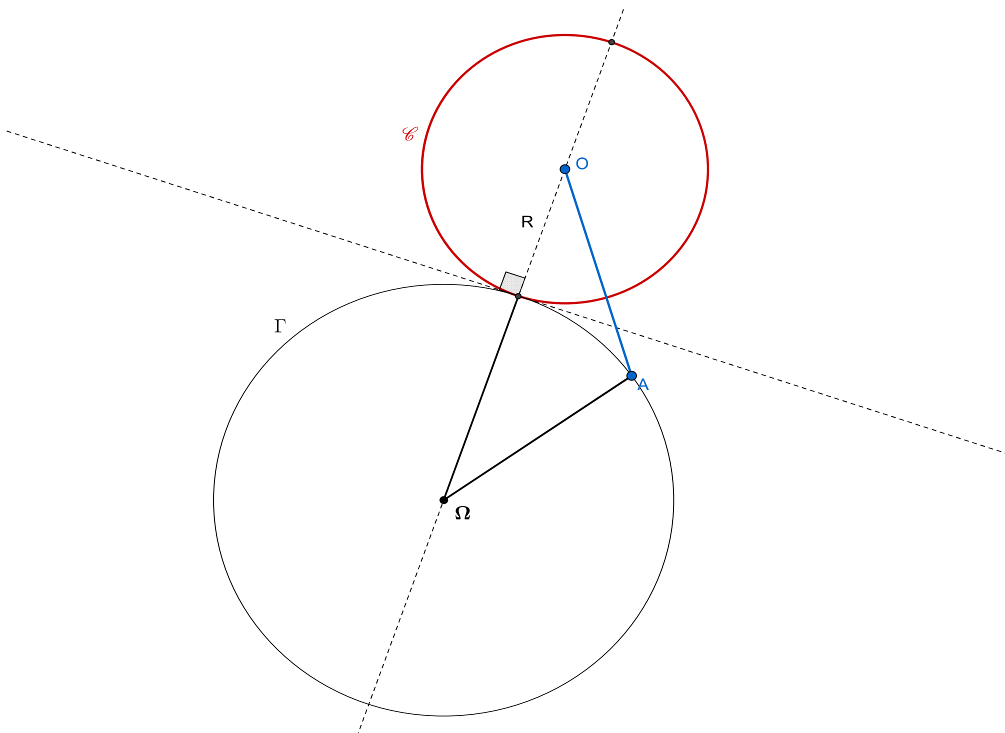
Figure 2. Les deux cercles sont tangents intérieurement.

Nous allons successivement étudier ces deux configurations.

Le cercle $\mathscr{C}$ est tangent extérieurement au cercle Γ.

La droite (ΩO) étant perpendiculaire à la tangente commune (cf. la figure ci-dessous), on a immédiatement :

$$\Omega O = \Omega A + R$$

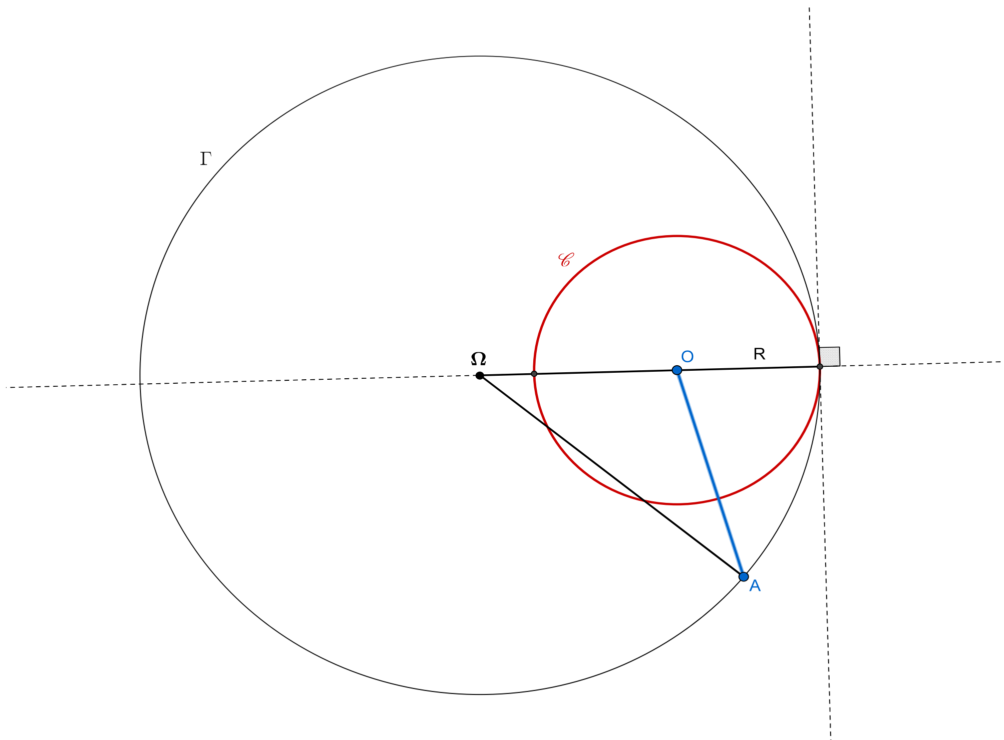


Réciproquement, si on a : $\Omega O = \Omega A + R$ alors il existe un unique point M du segment $[\Omega O]$ tel que $\Omega M = \Omega A$ et $OM = R$. C'est l'unique point d'intersection (s'il y en avait deux, on aurait $\Omega O < \Omega A + R$) des cercles Γ et $\mathscr{C}$ qui sont donc bien tangents.

Le cercle Γ est tangent intérieurement au cercle $\mathscr{C}$.

On a cette fois :

$$\Omega O = \Omega A - R$$



Réciproquement, si on a : $\Omega\mathrm{O} = \Omega\mathrm{A} - \mathrm{R}$ alors il existe un unique point M de la droite $(\Omega\mathrm{O})$ situé à droite de O tel que $\Omega\mathrm{M} = \Omega\mathrm{A}$ et $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$. C'est l'unique point d'intersection (s'il y en avait deux, on aurait $\Omega\mathrm{O} > \Omega\mathrm{A} - \mathrm{R}$) des cercles Γ et $\mathscr{C}$ qui sont donc bien tangents.

En définitive, le point Ω est le centre d'un cercle tangent au cercle $\mathscr{C}$ et passant par le point A si, et seulement si : $\Omega\mathrm{O} - \Omega\mathrm{A} = \mathrm{R}$ ou $\Omega\mathrm{A} - \Omega\mathrm{O} = \mathrm{R}$, soit :

$$\left|\Omega\mathrm{O} - \Omega\mathrm{A}\right| = \mathrm{R}$$

On reconnaît immédiatement la définition bifocale de l'hyperbole de foyers O et A et de paramètre $a = \frac{\mathrm{R}}{2}$. Son excentricité s'obtient alors classiquement :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{R}}$$

Résultat final

Le lieu des centres des cercles tangents au cercle $\mathscr{C}(\mathrm{O}\,;\mathrm{R})$ et passant par le point A est l'hyperbole de foyers O et A et d'excentricité $e = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{R}}$.

Complément

Ci-dessous, on a fait apparaître les deux branches de l'hyperbole (en vert) obtenue ainsi que deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 situés sur chacune des branches de l'hyperbole afin d'illustrer les deux types de tangence.