Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul *n*, on a :

$$1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+n\times 2^{n-1}=(n-1)\times 2^n+1$$

Analyse

Une jolie somme qui s'exprime de façon assez compacte. Le raisonnement par récurrence ne pose pas de difficulté particulière.

Résolution

Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } 1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+n\times 2^{n-1}=(n-1)\times 2^n+1 \text{ »}$$

Pour alléger un peu les notations, nous posons : $S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+n\times 2^{n-1}$.

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a : $S_n=S_1=1\times 2^0=1\times 1=1$.
Par ailleurs : $(n-1)\times 2^n+1=(1-1)\times 2^1+1=0+1=1$.
L'égalité est donc bien vérifiée.
$\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit *N* un entier naturel non nul quelconque fixé. On suppose $\mathscr{P}_N$ vraie. On suppose donc que l'on a : $S_N=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+N\times 2^{N-1}=(N-1)\times 2^N+1$ (hypothèse de récurrence).
On veut montrer que $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie, c'est-à-dire :

$$S_{N+1}=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+N\times 2^{N-1}+(N+1)\times 2^N=N\times 2^{N+1}+1$$

On a :

$$\begin{aligned}S_{N+1}&=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\ldots+N\times 2^{N-1}+(N+1)\times 2^N\\&=S_N+(N+1)\times 2^N\end{aligned}$$

Soit, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= S_N + (N+1)\times 2^N \\ &= (N-1)\times 2^N + 1 + (N+1)\times 2^N \\ &= \left[(N-1)+(N+1)\right]\times 2^N + 1 \\ &= 2N\times 2^N + 1 \\ &= N\times 2^{N+1} + 1 \end{aligned}$$

C'est exactement l'expression cherchée.

Ainsi, $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

Pour tout entier naturel *n* non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Résultat final

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, 1\times 2^0 + 2\times 2^1 + 3\times 2^2 + \ldots + n\times 2^{n-1} = (n-1)\times 2^n + 1$$