

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

$$f(x) = (-2x + 7)e^{-2x}$$

Analyse

On commence par déterminer le domaine de définition de la fonction f . L'une des limites requiert d'utiliser un résultat relatif aux croissances comparées.

Résolution

La fonction f est le produit des fonctions $x \mapsto -2x + 7$ et $x \mapsto e^{-2x}$.

La première est une fonction affine. Elle est définie sur \mathbb{R} .

La seconde est une composée : $x \mapsto -2x$ est définie sur \mathbb{R} et l'exponentielle également. La fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est donc définie sur \mathbb{R} .

Comme produit de deux fonctions définies sur \mathbb{R} , la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

On cherche donc les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Limite de f en $-\infty$

On a immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

Par ailleurs, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$$

On en déduit alors (multiplication) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 7)e^{-2x} = +\infty$$

Limite de f en $+\infty$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$$

Par ailleurs, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

Nous avons donc affaire ici à une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ ».

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (-2x + 7)e^{-2x} = \frac{-2x + 7}{e^{2x}} \\ &= \frac{-2x + 7}{(e^x)^2} = \frac{-2x + 7}{e^x} \times \frac{1}{e^x} \\ &= \left(\frac{-2x}{e^x} + \frac{7}{e^x} \right) \times \frac{1}{e^x} \\ &= \left(-2 \frac{x}{e^x} + 7 \frac{1}{e^x} \right) \times \frac{1}{e^x} \end{aligned}$$

Les deux résultats classiques : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, nous donnent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 \frac{x}{e^x} + 7 \frac{1}{e^x} \right) \times \frac{1}{e^x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 7)e^{-2x} = 0}$$

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 7)e^{-2x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 7)e^{-2x} = 0$$