

Démontrer que le logarithme népérien de la moyenne géométrique de n nombres strictement positifs est égal à la moyenne arithmétique de leurs logarithmes népériens.

Analyse

Un exercice classique qui requiert de connaître la propriété fondamentale du logarithme népérien et les notions de moyennes géométriques et arithmétique.

Résolution

Soit a_1, a_2, \dots, a_n n nombres strictement positifs.

Notons α la moyenne arithmétique de leurs logarithmes népériens.

On a donc, par définition :

$$\alpha = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}$$

D'après la propriété fondamentale du logarithme népérien, le numérateur est égal au logarithme népérien du produit $a_1 a_2 \dots a_n$ et on a :

$$\alpha = \frac{\ln(a_1 a_2 \dots a_n)}{n} = \frac{1}{n} \ln(a_1 a_2 \dots a_n)$$

Soit :

$$\alpha = \ln\left((a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Par définition, $(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$ est la moyenne géométrique des nombres a_1, a_2, \dots, a_n .

Le résultat est ainsi démontré.

$$\boxed{\ln\left((a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}}$$