Montrer que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

Analyse

Trois entiers consécutifs peuvent être simplement notés : $n-1$, n et $n+1$ …

Résolution

Comme précis ci-dessus, les trois entiers consécutifs peuvent être notés : $n-1$, n et $n+1$.
La somme S de leurs cubes vaut alors :

$$\begin{aligned} S &= (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \\ &= n^3 \cancel{-3n^2} + 3n \cancel{-1} + n^3 + n^3 \cancel{+3n^2} + 3n \cancel{+1} \\ &= 3n^3 + 6n \\ &= 3n\left(n^2+2\right) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que S est divisible par 3.
On s'intéresse donc au produit $n\left(n^2+2\right)$.

- Si $n \equiv 0\,(3)$ alors $n\left(n^2+2\right)$ est divisible par 3 et S est divisible par 9.
- Si $n \equiv 1\,(3)$ alors $n^2 \equiv 1^2\,(3)$, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1\,(3)$ puis $n^2+2 \equiv 3\,(3)$, soit $n^2+2 \equiv 0\,(3)$. On en déduit que le produit $n\left(n^2+2\right)$ est divisible par 3 et que S est divisible par 9.
- Si $n \equiv 2\,(3)$ alors $n^2 \equiv 2^2\,(3)$, c'est-à-dire $n^2 \equiv 4\,(3)$, soit $n^2 \equiv 1\,(3)$. On est ainsi ramené à la situation précédente et S est encore divisible par 9.

Dans tous les cas, S est bien divisible par 9.

Résultat final

La somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.