Calculer, pour tout entier n, la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos^3(x)$.

Analyse

Il est tellement plus simple de dériver des puissances des fonctions trigonométriques après les avoir linéarisées …

Résolution

On a, en notant $f : x \mapsto \cos^3(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+6\cos(x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos(3x)+3\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Comme on a : $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$, il vient : $\cos^{(n)}(3x) = 3^n\cos\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{4}\left[\cos^{(n)}(3x)+3\cos^{(n)}(x)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[3^n\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)+3\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{3^n}{4}\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Résultat final

La dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ est la fonction définie par :

$$x \mapsto \frac{3^n}{4}\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$