Résoudre le système :

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = 4 + 3\ln 2 \\ x + y = 6e^2 \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

Analyse

Après avoir défini l'ensemble dans lequel on recherche les solutions, il convient d'utiliser la propriété fondamentale du logarithme népérien afin de pouvoir travailler avec la somme et le produit des inconnues.

Résolution

Les logarithmes népériens de x et y sont définis si, et seulement si, les inconnues sont strictement positives. On va donc rechercher les couples solutions (x, y) dans $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

On note, par ailleurs, que les deux inconnues jouent des rôles symétriques : si (x_0, y_0) est un couple solution de (E) alors (y_0, x_0) est également un couple solution de (E).

Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} & \ln x + \ln y = 4 + 3\ln 2 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(xy) = 4 + 3\ln 2 \\ \Leftrightarrow\ & xy = e^{4+3\ln 2} \\ \Leftrightarrow\ & xy = e^4 e^{\ln 8} \\ \Leftrightarrow\ & xy = 8e^4 \end{aligned}$$

Le système (E) est donc équivalent au nouveau système :

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ x + y = 6e^2 \\ xy = 8e^4 \end{cases}$$

On va donc rechercher les éventuelles racines strictement positives de l'équation du second degré suivante :

$$X^2 - 6e^2 X + 8e^4 = 0 \quad \text{(E')}$$

Son discriminant réduit vaut :

$$\Delta = \left(-3e^2\right)^2 - 8e^4 = 9e^4 - 8e^4 = e^4 = \left(e^2\right)^2$$

On en tire les deux solutions distinctes de (E') :

$$X_1 = 3e^2 - e^2 = 2e^2$$
$$X_2 = 3e^2 + e^2 = 4e^2$$

Ces deux racines sont strictement positives et, de fait, nous fournissent les deux couples solutions de (E) :

$$\left(2e^2, 4e^2\right) \text{ et } \left(4e^2, 2e^2\right)$$

Résultat final

L'ensemble des solutions du système (E) est :

$$S = \left\{\left(2e^2, 4e^2\right), \left(4e^2, 2e^2\right)\right\}$$