Dans ce problème, on se propose d'étudier la famille de fonctions définie par :

$$f_m : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - mx}$$

où m est un réel non nul.

On note C_m la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère orthogonal.

1$^{\text{ère}}$ partie
Etude d'une première famille de fonctions

Etude de la famille de fonctions définie par :

$$g_m : x \mapsto e^x - mx$$

où m est un réel non nul.

On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de la fonction g_m dans un repère orthogonal.

1. Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_m$ de la fonction g_m.
2. Déterminer les limites de la fonction g_m aux bornes de son domaine de définition.
   On précisera la position de $\mathscr{C}_m$ par rapport à son(ses) asymptote(s).
3. Etudier les variations de la fonction g_m.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction g_m.
5. Donner le signe de $g_m(x)$.
6. Donner, pour différentes valeurs de m représentatives des diverses situations rencontrées, les allures des courbes $\mathscr{C}_m$ correspondantes.

$2^{\text{ème}}$ partie
Etude des fonctions f_m

1. Donner le domaine de définition D_m de la fonction f_m.
2. Déterminer les limites de la fonction f_m aux bornes de son domaine de définition.

   On précisera la position de C_m par rapport à son(ses) asymptote(s) (on montrera, en particulier, que toutes les courbes C_m admettent une même asymptote dont on précisera une équation).
3. Etudier les variations de la fonction f_m.

   On montrera, en particulier, que pour tout réel m non nul différent de e, la fonction f_m admet un extremum et que tous les points correspondants appartiennent à une même droite dont on précisera l'équation. Tout point de cette droite est-il un extremum d'une certaine courbe C_m ?
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_m.
5. Montrer que toutes les courbes C_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
6. Donner, pour différentes valeurs de m représentatives des diverses situations rencontrées, les allures des courbes C_m correspondantes.

Analyse

On commencera par donner le domaine de définition de la fonction *f*. Cette recherche conduit à l'utilisation du théorème de bijection et permet d'identifier une valeur interdite. L'étude aux bornes du domaine de définition permet d'identifier trois asymptotes …

Résolution

$1^{\text{ère}}$ partie
Etude d'une première famille de fonctions

Question 1.

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto -mx$ est également définie sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction linéaire. On en déduit ainsi que la fonction g_m est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions définies sur cet ensemble.

$$\mathscr{D}_m = \mathbb{R}$$

Question 2.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$. Puis :

- Si $m<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-mx) = -\infty$ et (somme) : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x) = -\infty$.
- Si $m>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-mx) = +\infty$ et (somme) : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g_m(x)-(-mx)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
On en déduit immédiatement que la courbe représentative $\mathscr{C}_m$ de la fonction g_m admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=-mx$.
Comme, pour tout x réel, on a : $g_m(x)-(-mx) = e^x > 0$, on en conclut que la courbe est située au-dessus de son asymptote.

Pour tout x réel, on a : $g_m(x) = e^x - mx = e^x\left(1-m\dfrac{x}{e^x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée), il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-m\dfrac{x}{e^x}\right) = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on en déduit (produit) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-m\dfrac{x}{e^x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} g_m(x) = +\infty$.

Si $m<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x) = -\infty$ et si $m>0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x) = +\infty$.
La courbe représentative $\mathscr{C}_m$ de la fonction g_m admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=-mx$ et est située au-dessus.

$$\lim_{x\to+\infty} g_m(x) = +\infty$$

Question 3.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto -mx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction linéaire. La fonction g_m est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout *x* réel, on a :

$$g_m'(x) = e^x - m$$

Si $m < 0$, on a, la fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_m'(x) = e^x - m > -m > 0$$

Dans ce cas, la fonction g_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $m > 0$, on a, pour tout *x* réel : $g_m'(x) = e^x - m = e^x - e^{\ln m}$.

On en déduit immédiatement :

- $g_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln m$.
- $g_m'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln m$.
- $g_m'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln m$.

Dans ce cas, la fonction g_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ln m]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln m\,;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $\ln m$ et on a : $g_m(\ln m) = e^{\ln m} - m\ln m = m - m\ln m = m(1-\ln m)$.

Si $m < 0$, la fonction g_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $m > 0$, la fonction g_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ln m]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln m\,;+\infty[$.

Question 4.

Les éléments précédents nous permette de dresser le tableau de variation de la fonction g_m.
On doit distinguer deux cas selon que *m* est strictement négatif ou strictement positif.

$\boxed{\text{Si } m<0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g_m'(x)$		$+$	
g_m	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{Si } m>0}$

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$g_m'(x)$		$-$		$+$	
g_m	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 5.

Au regard des variations de la fonction g_m obtenues précédemment, nous allons, ici encore, distinguer deux situations principales.

$\boxed{\text{Si } m<0}$

La fonction g_m est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est dérivable.
Elle y est strictement croissante.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_m(x) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer que la fonction g_m prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left]\lim_{x\to-\infty} g_m(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} g_m(x)\right[= \left]-\infty\,;+\infty\right[$ (en d'autres termes, cette fonction définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
On en déduit que l'équation $g_m(x)=0$ admet une unique solution α.
Comme la fonction g_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il vient immédiatement :

- Si $x<\alpha$ alors $g_m(x)<g_m(\alpha)=0$.
- $g_m(\alpha)=0$.
- Si $x>\alpha$ alors $g_m(x)>g_m(\alpha)=0$.

Remarque : comme $m<0$, on a : $g_m(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^{\alpha}-m\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{e^{\alpha}}{m} \Rightarrow \alpha<0$.
Le réel α est strictement négatif.

$\boxed{\text{Si } m>0}$

On a vu que dans ce cas la fonction g_m admettait un minimum en $x=\ln m$ et que la valeur de ce minimum était : $g_m(\ln m)=m(1-\ln m)$. On va donc de voir discuter à nouveau selon le signe de $m(1-\ln m)$ qui est celui de $1-\ln m$ puisque m est strictement positif.

On a $1-\ln m=0 \Leftrightarrow \ln m=1 \Leftrightarrow m=e$ et $1-\ln m>0 \Leftrightarrow \ln m<1 \Leftrightarrow m<e$.
D'où la discussion :

- Si $m\in\left]0\,;e\right[$, on a $1-\ln m>0$ et la fonction g_m prend des valeurs strictement positives.
- Si $m=e$, la valeur minimale prise par la fonction g_m (en $\ln m=\ln e=1$) est égale à 0. Ainsi, on a : $g_e(1)=0$ et pour tout réel x de $\left]-\infty\,;e\right[\cup\left]e\,;+\infty\right[$, on a : $g_m(x)>0$.
- Si $m>e$, on a $1-\ln m<0$.
  Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\ln m\right]$, la fonction g_m est continue et strictement décroissante. En outre, on a : $\lim_{x\to-\infty} g_m(x)=+\infty$ et $g_m(\ln m)=m(1-\ln m)<0$.
  Ainsi, la fonction g_m prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[m(1-\ln m)\,;+\infty\right[$. En particulier, il existe une unique valeur α_1 dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\ln m\right]$, solution de l'équation $g_m(x)=0$.
  La décroissance stricte de g_m permet alors de conclure :
  - Si $x\in\left]-\infty\,;\alpha_1\right[$, $g_m(x)>0$.
  - $g_m(\alpha_1)=0$.
  - Si $x\in\left]\alpha_1\,;\ln m\right]$, $g_m(x)<0$.

  Sur l'intervalle $\left[\ln m\,;+\infty\right[$, la fonction g_m est continue et strictement croissante. En outre, on a : $\lim_{x\to+\infty} g_m(x)=+\infty$ et $g_m(\ln m)=m(1-\ln m)<0$.

Ainsi, la fonction g_m prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[m(1-\ln m)\,;+\infty\right[$. En particulier, il existe une unique valeur α_2 dans l'intervalle $\left[\ln m\,;+\infty\right[$, solution de l'équation $g_m(x)=0$.

La croissance stricte de g_m permet alors de conclure :

- Si $x\in\left[\ln m\,;\alpha_2\right[$, $g_m(x)<0$.
- $g_m(\alpha_2)=0$.
- Si $x\in\left]\alpha_2\,;+\infty\right[$, $g_m(x)>0$.

En définitive :

- Si $x\in\left]-\infty\,;\alpha_1\right[\cup\left]\alpha_2\,;+\infty\right[$, $g_m(x)>0$.
- Si $x\in\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $g_m(x)=0$.
- $x\in\left]\alpha_1\,;\alpha_2\right[$, $g_m(x)<0$.

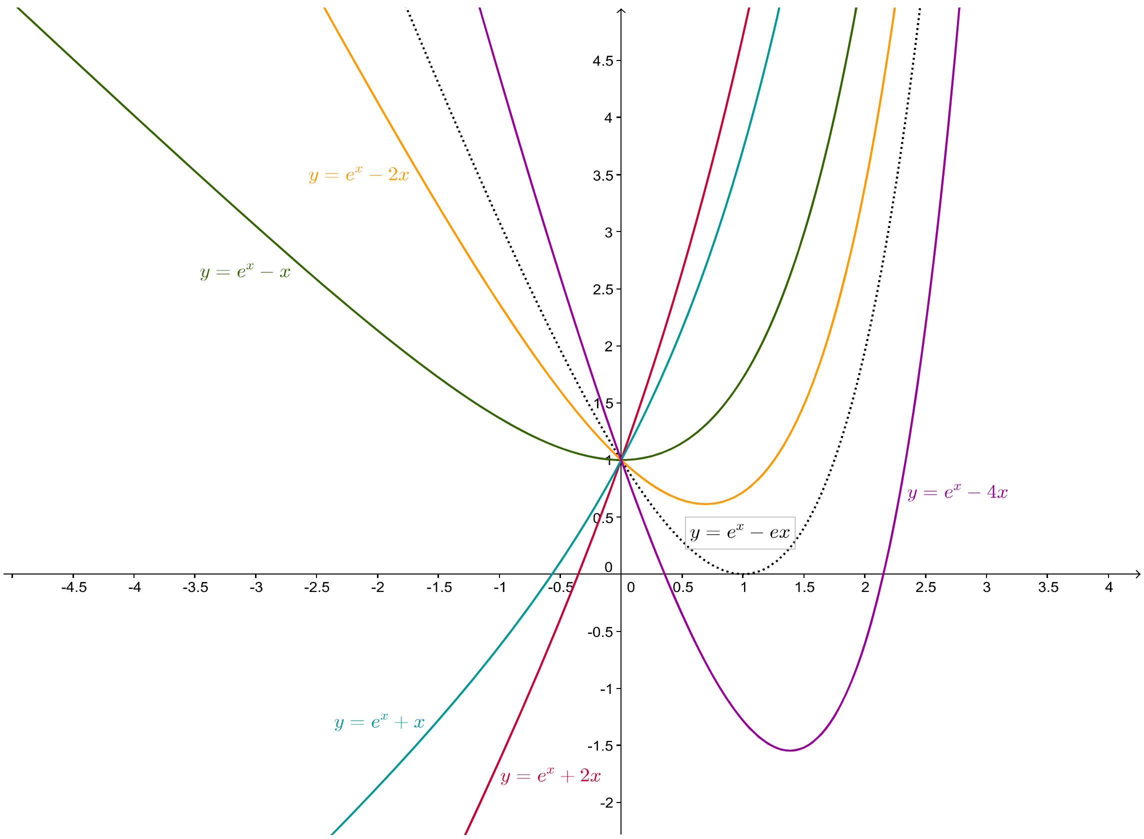
Remarque : comme $g_m(0)=1$ et $g_m(1)=e-m<0$, on peut affirmer que le réel α_1 appartient à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$. Par ailleurs, on peut facilement montrer qu'on a (dans la situation qui nous intéresse ici : $m>e$) : $g_m(2\ln m)>0$. On en déduit ainsi que la réel α_2 appartient à l'intervalle $\left]\ln m\,;2\ln m\right[$.

Finalement :

- Si $m<0$, il existe un réel α strictement négatif tel que :
  - Si $x<\alpha$ alors $g_m(x)<0$.
  - $g_m(\alpha)=0$.
  - Si $x>\alpha$ alors $g_m(x)>0$.
- Si $m\in\left]0\,;e\right[$, on a : $\forall x\in\mathbb{R},\, g_m(x)>0$.
- Si $m=e$, on a : $g_e(1)=0$ et pour tout réel x de $\left]-\infty\,;e\right[\cup\left]e\,;+\infty\right[$, on a : $g_m(x)>0$.
- Si $m>e$, il existe un réel α_1 dans l'intervalle $\left]0\,;1\right[$ et un réel α_2 dans l'intervalle $\left]\ln m\,;2\ln m\right[$ tels que :
  - Si $x\in\left]-\infty\,;\alpha_1\right[\cup\left]\alpha_2\,;+\infty\right[$, $g_m(x)>0$.
  - Si $x\in\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $g_m(x)=0$.
  - $x\in\left]\alpha_1\,;\alpha_2\right[$, $g_m(x)<0$.

Question 6.

La discussion menée précédemment nous conduit à envisager un certain nombre de valeurs pour le réel m. Nous avons retenu ici les valeurs suivantes : -2, -1, 1, e, 2 et 4.



2$^{\text{ème}}$ partie
Etude des fonctions f_m

Question 1.

Pour m réel non nul, la fonction f_m est définie par :

$$f_m(x) = \frac{e^x}{e^x - mx} = \frac{e^x}{g_m(x)}$$

La fonction exponentielle et la fonction g_m étant définies sur $\mathbb{R}$, on en déduit immédiatement que $f_m(x)$ existe si, et seulement si $g_m(x)$ est non nul.

En utilisant le résultat de la question 5 de la 1ère partie, on peut directement conclure :

- Si $m<0$, il existe un unique réel α, strictement négatif, tel que $g_m(\alpha)=0$ et on a : $\mathrm{D}_m=\mathbb{R}-\{\alpha\}$.
- Si $m\in\,]0\,;e[$, on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ g_m(x)>0$ et $\mathrm{D}_m=\mathbb{R}$.
- Si $m=e$, on a : $g_e(x)=0$ si, et seulement si, $x=1$ et $\mathrm{D}_m=\mathbb{R}-\{1\}$.
- Si $m>e$, on a : $g_m(x)=0$ si, et seulement si, $x=\alpha_1$ ou $x=\alpha_2$ et $\mathrm{D}_m=\mathbb{R}-\{\alpha_1\,;\alpha_2\}$.

Question 2.

Si $m<0$

Il existe un réel α, strictement négatif, tel que $g_m(\alpha)=0$ et on a : $\mathrm{D}_m=\mathbb{R}-\{\alpha\}$.
On doit donc étudier les limites de la fonction f_m en $-\infty$, en α à gauche, en α à droite et en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x)=-\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=0$.
La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (axe des abscisses).

Pour tout réel x, on a $e^x>0$. Le signe de $f_m(x)-0=f_m(x)=\dfrac{e^x}{g_m(x)}$ est donc celui de $g_m(x)$. D'après la question 5 de la première partie, il vient :

- Si $x<\alpha$, on a $g_m(x)<0$ et donc $f_m(x)-0<0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.
- Si $x>\alpha$, on a $g_m(x)>0$ et donc $f_m(x)-0>0$: la courbe C_m est située au-dessus l'asymptote.

On a : $\lim\limits_{x\to\alpha} e^x=e^\alpha>0$. Comme $g_m(x)<0$ pour tout x réel strictement inférieur à α, il vient : $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} g_m(x)=0^-$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f_m(x)=-\infty$.

Comme $g_m(x)>0$ pour tout x réel strictement inférieur à α, il vient : $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} g_m(x)=0^+$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f_m(x)=+\infty$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet une asymptote verticale d'équation $x=\alpha$.

Pour tout réel x dans $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha\}$, on a : $f_m(x) = \dfrac{e^x}{e^x - mx} = \dfrac{1}{1 - m\dfrac{x}{e^x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée), on a immédiatement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = 1$.

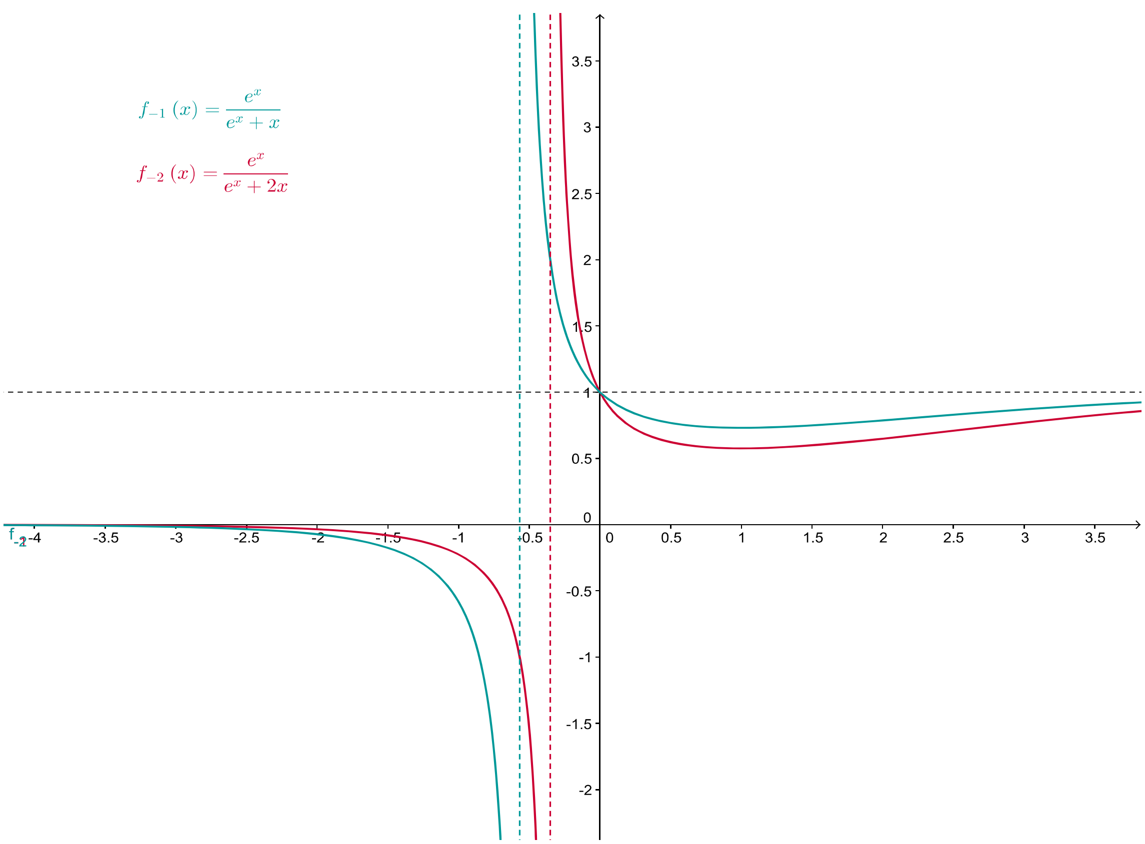
La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet ainsi en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_m(x) - 1 = \dfrac{e^x}{e^x - mx} - 1 = \dfrac{e^x - e^x + mx}{e^x - mx} = \dfrac{mx}{g_m(x)}$.

D'après la question 5 de la première partie, il vient alors :

- Si $x < \alpha$, on a $g_m(x) < 0$ et $mx > 0$. Donc $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.
- Si $x \in \left]\alpha\,;0\right[$, on a $g_m(x) > 0$ et $mx > 0$. Donc $f_m(x) - 1 > 0$: la courbe C_m est située au-dessus de l'asymptote.
- Si $x = 0$, $f_m(x) - 1 = 0$: la courbe C_m coupe l'asymptote.
- Si $x > 0$, on a $g_m(x) > 0$ et $mx < 0$. Donc $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.

Bien que ce ne soit pas demandé, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative des fonctions f_{-1} (pour laquelle $\alpha \simeq -0{,}567\,14$) et f_{-2} (pour laquelle $\alpha \simeq -0{,}351\,73$).



$\boxed{\text{Si } m \in]0\,;e[}$

Le domaine de définition de la fonction f_m est $\mathbb{R}$.
On doit donc étudier les limites de la fonction f_m en $-\infty$ et en $+\infty$.
Rappelons que dans ce cas, pour tout *x* réel, on a : $g_m(x) > 0$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g_m(x) = +\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = 0$.
La courbe représentative C$_m$ de la fonction f_m admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

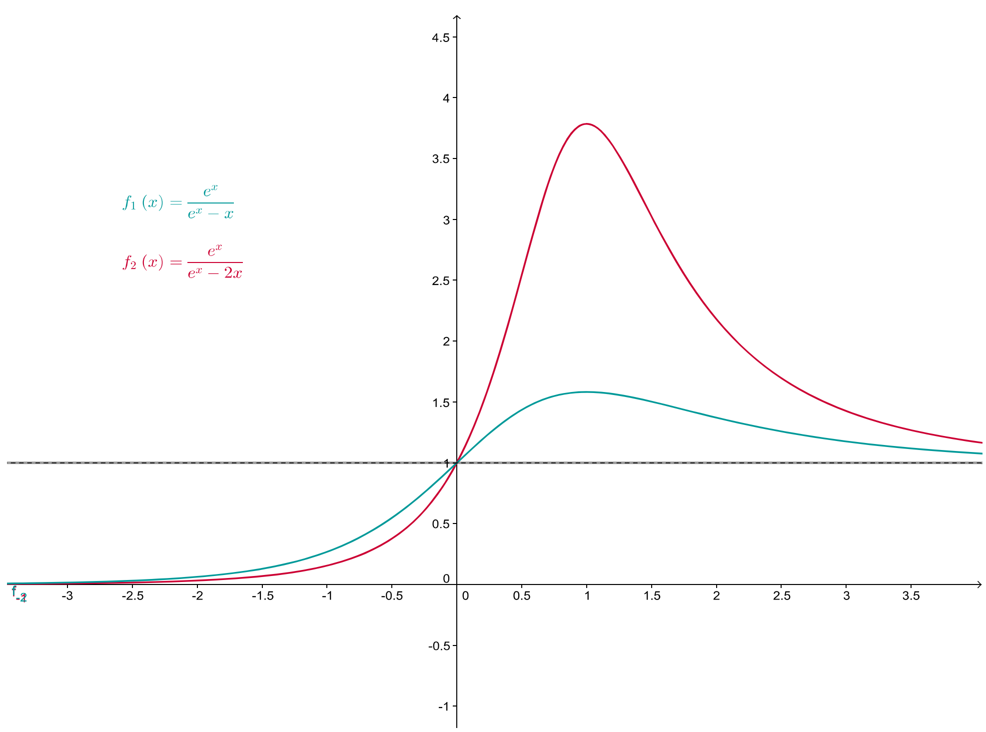
Pour tout réel *x*, on a $e^x > 0$ et $g_m(x) > 0$. La différence $f_m(x) - 0 = f_m(x) = \dfrac{e^x}{g_m(x)}$ est donc strictement positive et la courbe C$_m$ est située au-dessus l'asymptote.

On a encore : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 1$ et la courbe représentative C$_m$ de la fonction f_m admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_m(x) - 1 = \dfrac{mx}{g_m(x)}$ est du signe de *x* puisque pour tout x réel, on a :

$\dfrac{m}{g_m(x)} > 0$. D'où :

- Si $x < 0$, on a $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C$_m$ est située sous l'asymptote.
- Si $x = 0$, $f_m(x) - 1 = 0$: la courbe C$_m$ coupe l'asymptote.
- Si $x > 0$, on a $f_m(x) - 1 > 0$: la courbe C$_m$ est située au-dessus l'asymptote.



$\boxed{\text{Si } m = e}$

On a : $D_e = \mathbb{R} - \{1\}$.

On doit donc étudier les limites de la fonction f_e en $-\infty$, en 1 à gauche, en 1 à droite et en $+\infty$.

Rappelons que dans ce cas, pour tout *x* réel différent de 1, on a : $g_e(x) > 0$.

On a : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x\to-\infty} g_e(x) = +\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim_{x\to-\infty} f_e(x) = 0$.

La courbe représentative C_e de la fonction f_e admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

Pour tout réel *x*, on a $e^x > 0$ et $g_e(x) > 0$. La différence $f_e(x) - 0 = f_e(x) = \dfrac{e^x}{g_e(x)}$ est donc strictement positive et la courbe C_e est située au-dessus l'asymptote.

On a : $\lim_{x\to1} e^x = e^1 > 0$. Comme $g_m(x) > 0$ pour tout *x* réel différent de 1, il vient : $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g_e(x) = 0^+$. On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f_e(x) = +\infty$.

On raisonne de façon similaire à droite de 1 pour obtenir le même résultat : $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f_e(x) = +\infty$.

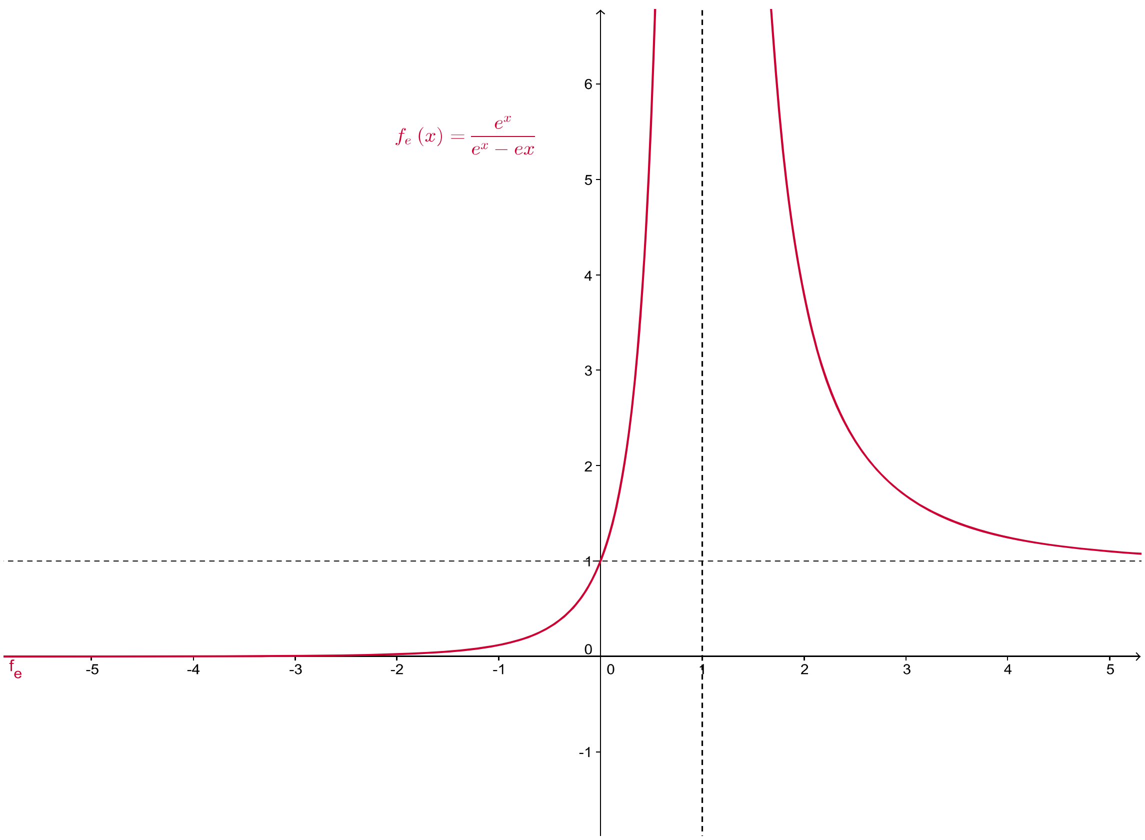
La courbe représentative C_e de la fonction f_e admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

On a encore : $\lim_{x\to+\infty} f_e(x) = 1$ et la courbe représentative C_e de la fonction f_e admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_e(x) - 1 = \dfrac{ex}{g_e(x)}$ est du signe de *x* puisque pour tout *x* réel, on a : $\dfrac{e}{g_e(x)} > 0$. D'où, comme précédemment :

- Si $x < 0$, la courbe C_e est située sous l'asymptote.
- Si $x = 0$, la courbe C_e coupe l'asymptote.
- Si $x > 0$, la courbe C_e est située au-dessus l'asymptote.

A la page suivante, nous avons fourni la courbe représentative de la fonction f_e.



$\boxed{\text{Si } m > e}$

On a $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha_1 ; \alpha_2\}$.

On doit donc étudier les limites de la fonction f_m en $-\infty$, en α_1 à gauche, en α_1 à droite, en α_2 à gauche, en α_2 à droite et en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \to -\infty} g_m(x) = +\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = 0$.

La courbe représentative C$_m$ de la fonction f_m admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

Comme la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives, la différence

$f_m(x) - 0 = f_m(x) = \dfrac{e^x}{g_m(x)}$ est du signe de $g_m(x)$:

- Si $x \in]-\infty ; \alpha_1[\cup]\alpha_2 ; +\infty[$, on a $g_m(x) > 0$ et la courbe C$_m$ est située au-dessus l'asymptote.
- Si $x \in]\alpha_1 ; \alpha_2[$, on a $g_m(x) < 0$ et la courbe C$_m$ est située en dessous de l'asymptote.

On a : $\lim_{x \to \alpha_1} e^x = e^{\alpha_1} > 0$. Comme $g_m(x) > 0$ pour tout x réel strictement inférieur à α_1, il vient : $\lim_{\substack{x \to \alpha_1 \\ x < \alpha_1}} g_m(x) = 0^+$. On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x \to \alpha_1 \\ x < \alpha_1}} f_m(x) = +\infty$.

Comme $g_m(x) < 0$ pour tout *x* réel dans $]\alpha_1 ; \alpha_2[$, il vient : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_1 \\ x > \alpha_1}} g_m(x) = 0^-$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_1 \\ x > \alpha_1}} f_m(x) = -\infty$.

La courbe représentative C*m* de la fonction f_m admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha_1$.

Comme $g_m(x) < 0$ pour tout *x* réel dans $]\alpha_1 ; \alpha_2[$, il vient : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_2 \\ x < \alpha_2}} g_m(x) = 0^-$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_2 \\ x < \alpha_2}} f_m(x) = -\infty$.

Comme $g_m(x) > 0$ pour tout *x* réel strictement supérieur à α_2, il vient : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_2 \\ x > \alpha_2}} g_m(x) = 0^+$. On en déduit (rapport) : $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha_2 \\ x > \alpha_2}} f_m(x) = +\infty$.

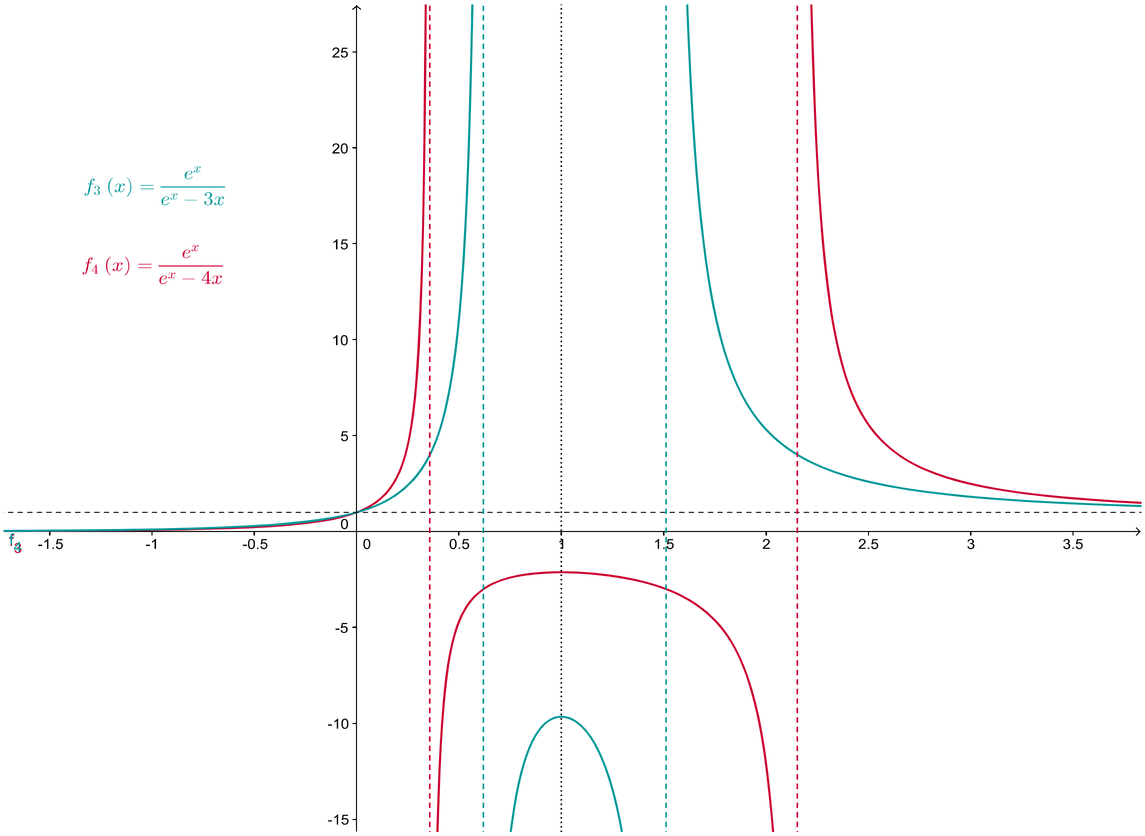
La courbe représentative C*m* de la fonction f_m admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha_2$.

On a encore : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 1$ et la courbe représentative C*m* de la fonction f_m admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_m(x) - 1 = \dfrac{mx}{g_m(x)}$ est du signe de *x* puisque pour tout x réel, on a : $\dfrac{m}{g_m(x)} > 0$. D'où :

- Si $x < 0$, on a $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C*m* est située sous l'asymptote.
- Si $x = 0$, $f_m(x) - 1 = 0$: la courbe C*m* coupe l'asymptote.
- Si $x \in \mathbb{R}_+^* - \{\alpha_1, \alpha_2\}$, on a $f_m(x) - 1 > 0$: la courbe C*m* est située au-dessus l'asymptote.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_3 (pour laquelle $\alpha_1 \simeq 0{,}619\,06$ et $\alpha_2 \simeq 1{,}512\,13$) et f_4 (pour laquelle $\alpha_1 \simeq 0{,}357\,40$ et $\alpha_2 \simeq 2{,}153\,29$).



On constate, en définitive, que toutes les courbes C_m admettent pour asymptote la droite d'équation $y = 1$.

Question 3.

Soit *m* réel non nul. La fonction f_m est le rapport de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: la fonction exponentielle et la fonction g_m. Pour tout réel *x* tel que $g_m(x) \neq 0$, c'est-à-dire pour tout réel *x* de D_m, on a alors :

$$\begin{aligned} f_m'(x) &= \frac{e^x \times g_m(x) - e^x \times g_m'(x)}{\left(g_m(x)\right)^2} \\ &= e^x \frac{g_m(x) - g_m'(x)}{\left(g_m(x)\right)^2} \\ &= e^x \frac{e^x - mx - \left(e^x - m\right)}{\left(e^x - mx\right)^2} \\ &= e^x \frac{m(1-x)}{\left(e^x - mx\right)^2} \end{aligned}$$

On a donc $\forall x \in \mathrm{D}_m,\ f_m'(x) = m\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x - mx)^2}$.

Pour tout réel x de D_m, on a : $\dfrac{e^x}{(e^x - mx)^2} > 0$. Le signe de $f_m'(x)$ est donc celui du produit $m(1-x)$.

$\boxed{\text{Si } m < 0}$

On a $\mathrm{D}_m = \mathbb{R} - \{\alpha\}$ avec $\alpha < 0$.
On a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty\,;\alpha[\cup]\alpha\,;1[$ on a $1-x>0$ et donc $m(1-x)<0$. Il vient alors : $f_m'(x) < 0$.
- Pour $x=1$, $f_m'(x) = 0$.
- Pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$ on a $1-x<0$ et donc $m(1-x)>0$. Il vient alors : $f_m'(x) > 0$.

Dans ce cas :
- La fonction f_m est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;\alpha[$ et $]\alpha\,;1]$.
- La fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

La fonction f_m admet donc un <u>minimum</u> pour $x=1$ et $f_m(1) = \dfrac{e^1}{e^1 - m\times 1} = \dfrac{e}{e-m}$.

$\boxed{\text{Si } m \in]0\,;e[}$

On a $\mathrm{D}_m = \mathbb{R}$.
Il vient immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty\,;1[$ on a $1-x>0$ et donc $m(1-x)>0$. Il vient alors : $f_m'(x) > 0$.
- Pour $x=1$, $f_m'(x) = 0$.
- Pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$ on a $1-x<0$ et donc $m(1-x)<0$. Il vient alors : $f_m'(x) < 0$.

Dans ce cas :
- La fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
- La fonction f_m est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

La fonction admet donc un maximum pour $x=1$ et $f_m(1)=\dfrac{e}{e-m}$.

$\boxed{\text{Si } m=e}$

On a $\mathrm{D}_e=\mathbb{R}-\{1\}$.
On a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty\,;1[$ on a $1-x>0$ et donc $m(1-x)>0$. Il vient alors : $f_m'(x)>0$.
- Pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$ on a $1-x<0$ et donc $m(1-x)<0$. Il vient alors : $f_m'(x)<0$.

Dans ce cas :
- La fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
- La fonction f_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

$\boxed{\text{Si } m>e}$

On a $\mathrm{D}_m=\mathbb{R}-\{\alpha_1\,;\alpha_2\}$ avec $\alpha_1\in]0\,;1[$ et $\alpha_2\in]\ln m\,;2\ln m[$.
On a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty\,;\alpha_1[\cup]\alpha_1\,;1[$ on a $1-x>0$ et donc $m(1-x)>0$. Il vient alors : $f_m'(x)>0$.
- Pour $x=1$, $f_m'(x)=0$.
- Pour tout réel x de $]1\,;\alpha_2[\cup]\alpha_2\,;+\infty[$ on a $1-x<0$ et donc $m(1-x)<0$. Il vient alors : $f_m'(x)<0$.

Dans ce cas :
- La fonction f_m est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,;\alpha_1[$ et $]\alpha_1\,;1]$.
- La fonction f_m est strictement décroissante sur les intervalles $[1\,;\alpha_2[$ et $]\alpha_2\,;+\infty[$.

La fonction admet donc un maximum pour $x=1$ et $f_m(1)=\dfrac{e}{e-m}$.

Ainsi, pour tout réel m non nul différent de e, la fonction f_m admet un extremum :

- Si $m<0$, la fonction f_m admet un minimum pour $x=1$ et on a $f_m(1)=\dfrac{e}{e-m}$.
- Si $m\in]0\,;e[\cup]e\,;+\infty[$, la fonction f_m admet un maximum pour $x=1$ et on a $f_m(1)=\dfrac{e}{e-m}$.

Tous les extrema sont donc situés sur la droite d'équation $x=1$.

Soit maintenant $\mathrm{M}(1\,;\,y)$. Existe-t-il une valeur de m telle que M soit un extremum de la courbe C_m ?

Il faudrait avoir : $y=f_m(1)=\dfrac{e}{e-m}$. Soit : $(y-1)e=my$.
On élimine la valeur $y=1$ car elle conduirait à $m=0$.
Ensuite, pour $y\neq 0$, il vient : $m=\dfrac{(y-1)e}{y}=e\left(1-\dfrac{1}{y}\right)$.
On en conclut :

> Tout point de la droite d'équation $x=1$ hormis les points $(1\,;0)$ et $(1\,;1)$
> est un extremum d'une courbe C_m.

Question 4.

$\boxed{\text{Si } m<0}$

x	$-\infty$		α			1		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	$\Vert$		$-$		$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$		$\searrow$	$\dfrac{e}{e-m}$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $m \in]0\,;e[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$		$-$	
f_m	0	↗	$\dfrac{e}{e-m}$	↘	1

Si $m = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_e'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
f_e	0	↗	$+\infty \;\Vert\; +\infty$	↘	1

Si $m > e$

x	$-\infty$		α_1		1		α_2		$+\infty$
$f_e'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f_e	0	↗	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	↗	$\dfrac{e}{e-m}$	↘	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	↘	1

Question 5.

On cherche un point $M(a\,;b)$ tel que pour tout m non nul M appartienne à C_m.
On a alors :

$$\forall m \in \mathbb{R}^*, M(a\,;b) \in C_m$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^*, b = f_m(a) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^*, b = \frac{e^a}{e^a - ma}$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^*, b = \frac{e^a}{e^a - ma} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^* \begin{cases} e^a - ma \neq 0 \\ b\left(e^a - ma\right) = e^a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^* \begin{cases} e^a - ma \neq 0 \\ mab + (1-b)e^a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}^*\, e^a - ma \neq 0 \\ ab = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Toutes les courbes C_m passent par le point $A(0\,;1)$.

Question 6.

Nous avons représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_m pour les six valeurs de m suivantes : -2, -1, 1, 2, e et 5.