Pondichéry – Avril 2014 – Série S – Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel *n*, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel *n*.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de *n*.

   c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	*n* entier naturel *R* réel *P* réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de *P*

Traitement	*R* prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher *n*

   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$?

   b. Pour $P = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

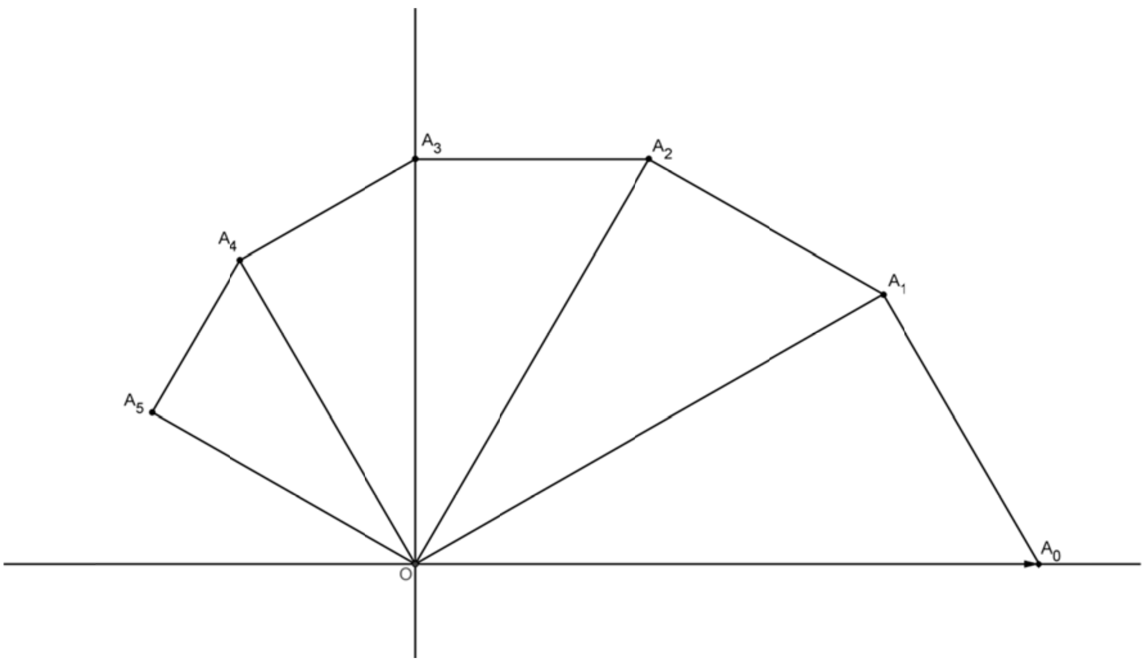
4. **a.** Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

Les traits de construction seront apparents.



Analyse

Sans présenter de difficulté majeure, l'exercice, conforme, de ce point de vue, à une tendance certaine, aborde une variété de thèmes nécessitant des méthodes de résolution elles-mêmes variées.
Les questions 1 et 2 conduisent à des manipulations algébriques sur des complexes, notamment les termes d'une suite complexe.
La question 3 est l'ingrédient algorithmique de l'exercice.
La question 4 permet de se rappeler que l'algèbre et la géométrie entretiennent des liens étroits et que manipuler les complexes en négligeant la géométrie est une bien triste chose ! ☺
Incidemment, cette question doit faire penser les candidat(e)s à se à se munir, pour l'épreuve, d'un crayon papier, d'un compas et d'une gomme !

Résolution

Question 1.

On commence par déterminer le module de $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$:

$$\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right|^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{3}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

D'où : $\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right|=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Il vient alors :

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

On identifie facilement : $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$ et $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$.
Finalement : $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$\boxed{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Question 2.a.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $r_n = |z_n|$.
D'où, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \underbrace{\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|}_{=1} \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_n$$

La suite (r_n) est bien géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{La suite } (r_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Question 2.b.

D'après le résultat de la question précédente, on a, pour tout entier naturel *n* : $r_n = r_0 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Or $z_0 = 1$. On en tire immédiatement : $r_0 = |z_0| = |1| = 1$.
Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.}$$

Question 2.c.

Comme z_n est l'affixe du point A_n, on a immédiatement : $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Or, on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]-1;1[$. On en déduit immédiatement : $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ et, finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} OA_n = 0}$$

Question 3.a.

Faisons « tourner l'algorithme à la main » avec $P = 0,5$:

n	R (valeur exacte)	R (valeur approchée à 10^{-3})	$R > P$
0	1	1,000	Oui
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866	Oui
2	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0,75$	0,750	Oui
3	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$	0,650	Oui
4	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} = 0,562\,5$	0,563	Oui
5	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \frac{9\sqrt{3}}{32}$	0,487	Non

L'algorithme va donc afficher la dernière valeur de la variable N, à savoir 5.

Pour $P = 0,5$ l'algorithme affiche la valeur 5.

Question 3.b.

La boucle « Tant que » s'interrompt dès que la condition « $R > P$ » n'est plus vérifiée, c'est-à-dire, dès que l'on a : « $R \le P$ ». L'algorithme affiche alors la valeur courante de la variable *n*. En d'autres termes, la valeur courante de la variable R correspondant à r_n (valeur initiale égale à 1 et multiplication par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ à chaque passage dans la boucle), l'algorithme fournit la plus petite valeur de *n* telle que $r_n \le P$.

Avec $P = 0,01$ on a :

$$r_n \le P \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \le 0,01 \Leftrightarrow n \underbrace{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{<0 \text{ car } \frac{\sqrt{3}}{2}<1} \le \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Or : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} \simeq 32,02 > 32$. L'algorithme affichera donc la valeur 33 comme mentionné dans l'énoncé.

Pour un réel *P* strictement positif donné, l'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier naturel *n* telle que $r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ soit inférieur ou égal à *P*.

Question 4.a.

Soit *n* un entier naturel quelconque. Nous allons ici comparer $OA_n{}^2$ et $OA_{n+1}{}^2 + A_nA_{n+1}{}^2$.

On a :

$$OA_{n+1}{}^2 = r_{n+1}^2 = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2(n+1)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} = \frac{3}{4} \times \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{3}{4} \times r_n^2$$

$$\begin{aligned} A_nA_{n+1}{}^2 &= \left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\|^2 = \left|z_{n+1} - z_n\right|^2 = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n - z_n\right|^2 = \left|\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right|^2 \\ &= \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right|^2 \times \left|z_n\right|^2 = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\right] \times r_n^2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16}\right) \times r_n^2 = \frac{4}{16} \times r_n^2 \\ &= \frac{1}{4} \times r_n^2 \end{aligned}$$

D'où : $OA_{n+1}{}^2 + A_nA_{n+1}{}^2 = \dfrac{3}{4} \times r_n^2 + \dfrac{1}{4} \times r_n^2 = r_n^2 = OA_n{}^2$.

Comme $OA_{n+1}{}^2 + A_nA_{n+1}{}^2 = OA_n{}^2$, la réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Pour tout entier naturel *n*, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Question 4.b.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$, c'est-à-dire : $z_n = |z_n| e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

On en déduit immédiatement que $\dfrac{n\pi}{6}$ est un argument de z_n.

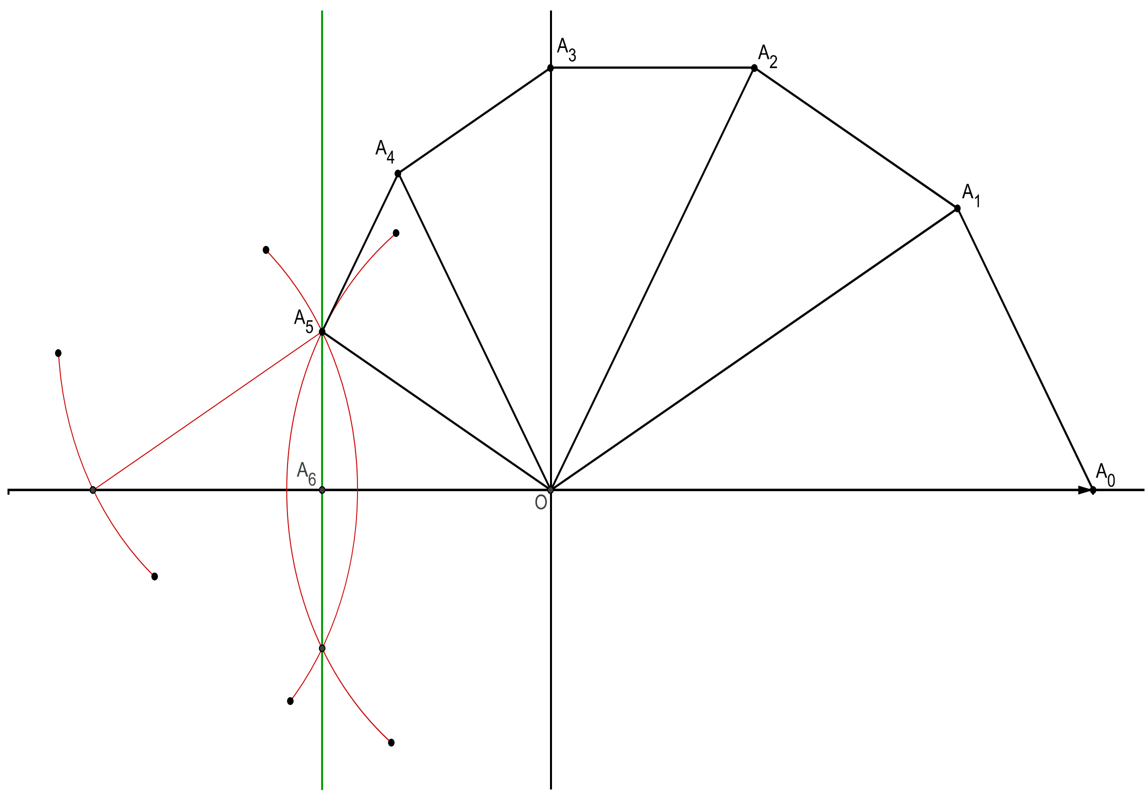
On a alors : A_n est un point de l'axe des ordonnées si, et seulement si, $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un entier A PRIORI quelconque. Mais puisque n est un entier naturel, on doit se limiter à k entier naturel également ($n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 3+6k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow k\in\mathbb{N}$).

Le point A_n est un point de l'axe des ordonnées si, et seulement si, $n=3+6k$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Question 4.c.

Avec $n=6$, nous avons $z_6=r_6e^{i\frac{6\pi}{6}}=r_6e^{i\pi}=-r_6$.

On va donc simplement obtenir le point A_6 en projetant perpendiculairement le point A_5 sur l'axe des abscisses : on obtient bien ainsi un triangle OA_5A_6 rectangle en A_6 (cf. figure ci-dessous).

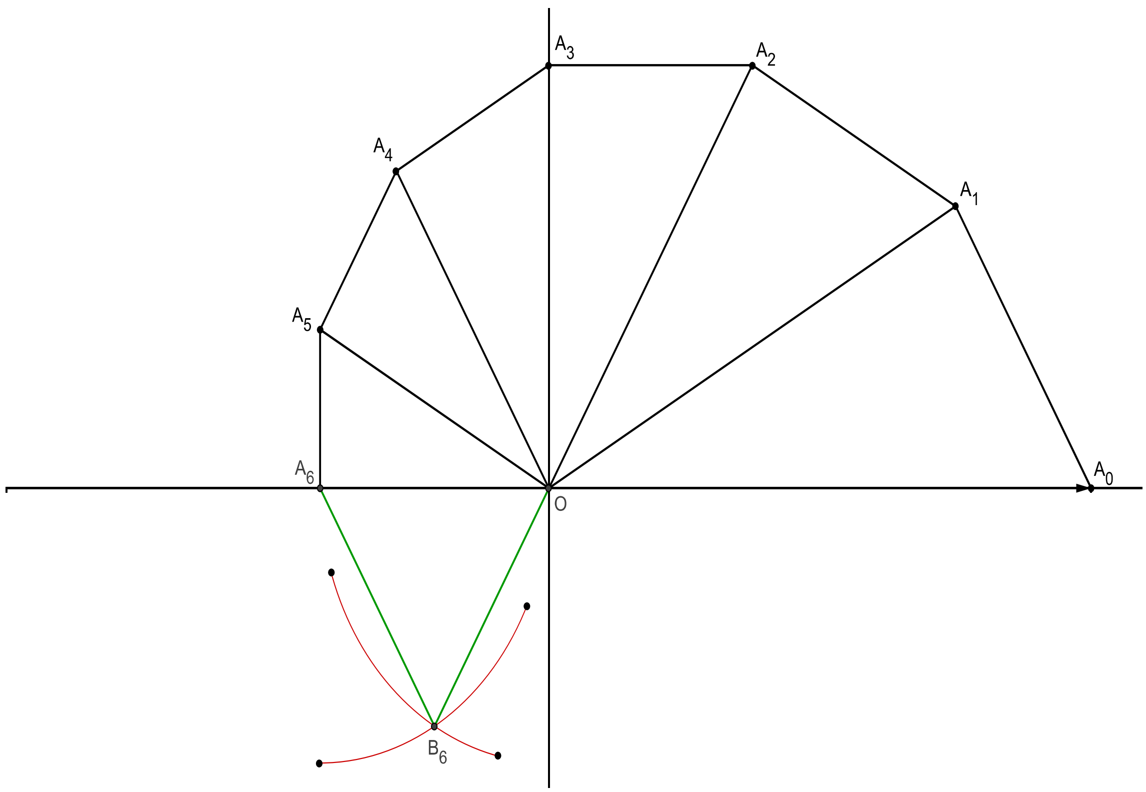


La construction est simple et utilise le fait que les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement. Les sommets de losange se construisent à l'aide d'arcs de cercles (en rouge sur la figure) à partir du segment $[OA_5]$ (dont la longueur est celle des quatre côtés du losange). Le point A_6 est alors le point d'intersection des diagonales du losange.

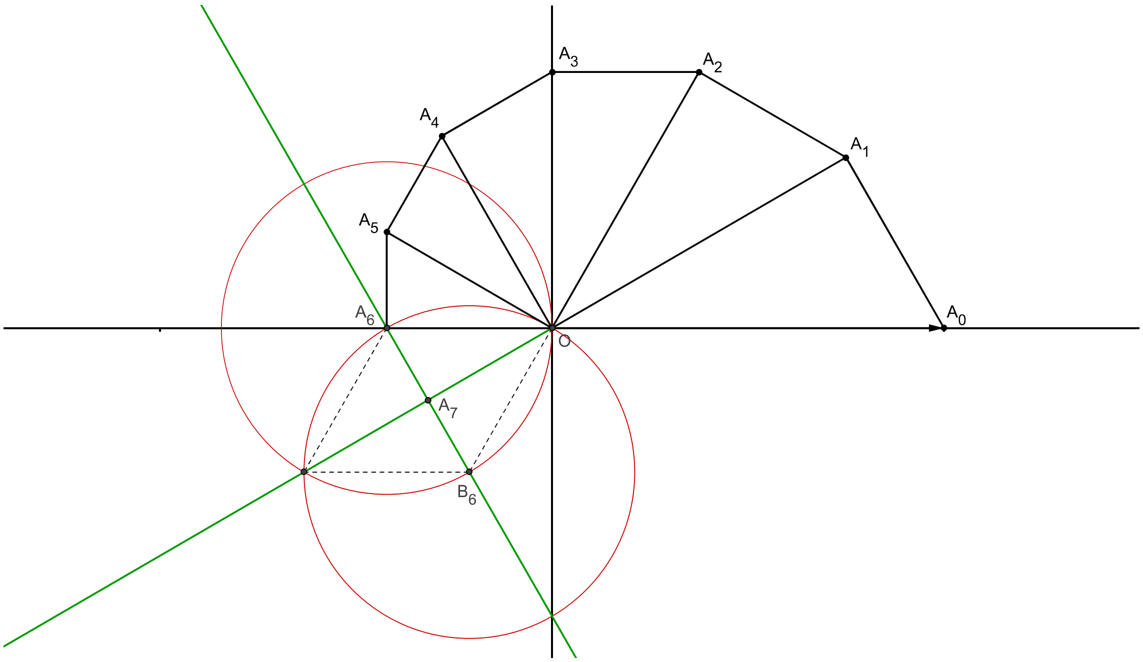
Pour les points A_7 et A_8, les constructions sont moins immédiates.

Nous détaillons un peu le principe d'une construction du point A_7 .

Comme $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ et $z_{n+1} = r_{n+1} e^{i\frac{(n+1)\pi}{6}}$, nous pouvons dire que l'angle $\widehat{A_n O A_{n+1}}$ admet pour mesure $\frac{\pi}{6}$. Comme on peut facilement construire la bissectrice d'un angle, nous allons en fait construire un triangle équilatéral à partir du segment $[OA_n]$, soit ici $[OA_6]$ (deux arcs de cercles, respectivement centrés en O et en A_6 suffisent (en rouge sur la figure ci-dessous)) : nous notons B_6 le troisième sommet de ce triangle.



Le point A_7 est alors obtenu, dans le triangle OA_6B_6, comme pied de la hauteur issue du sommet O (rappelons que dans un triangle équilatéral la hauteur, la bissectrice et la médiane issues d'un sommet sont confondues). La construction du point A_7 se fait alors comme précédemment (fondamentalement à partir d'un losange).



Les points A_8 et A_9 se construisent alors respectivement comme les points A_7 et A_6.