Liban – Mai 2012 – Série S – Exercice

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Un triangle

a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2$, $b=3+i\sqrt{3}$ et $c=2i\sqrt{3}$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+i\sqrt{3}$.

2. Une transformation du plan

On note $\left(z_n\right)$ la suite de nombres complexes de terme initial $z_0=0$ et telle que :

$$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2\text{, pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel *n*, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

$$3+i\sqrt{3},\ 2+2i\sqrt{3} \text{ et } 2i\sqrt{3}$$

On remarquera que : $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}$, $\mathrm{A}_2=\mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_4=\mathrm{C}$.

b) Comparer les longueurs des segments $\left[\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right]$, $\left[\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\right]$ et $\left[\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\right]$.

c) Etablir que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\omega\right),$$

où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1.b)**.

d) En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e) Justifier que, pour tout entier naturel *n*, on a : $\mathrm{A}_{n+6}=\mathrm{A}_n$.
Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d’initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l’évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $\left[A_nA_{n+1}\right]$.

Analyse

Complexe, géométrie et suite : un peu de tout même si, au cœur de l'exercice, se trouve une rotation. On doit parfaitement en connaître l'expression complexe (identification et exploitation d'une telle expression).

Résolution

Un triangle

Question 1.a.

On peut raisonner de diverses façons en ayant, ou pas (!), rapidement positionné les points A, B et C sur un dessin.

On a :

$$\mathrm{AB}^2 = |b-a|^2 = \left|3+i\sqrt{3}-2\right|^2 = \left|1+i\sqrt{3}\right|^2 = 1+3 = 4$$

$$\mathrm{AC}^2 = |c-a|^2 = \left|2i\sqrt{3}-2\right|^2 = 4\left|-1+i\sqrt{3}\right|^2 = 4\times(1+3) = 16$$

$$\mathrm{BC}^2 = |c-b|^2 = \left|2i\sqrt{3}-\left(3+i\sqrt{3}\right)\right|^2 = \left|-3+i\sqrt{3}\right|^2 = 9+3 = 12$$

On a donc $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$ et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B. Une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est donc $\frac{\pi}{2}$.

Puisque nous disposons des affixes des points A, B et C, nous pouvons aussi nous intéresser à l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$: $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = \arg\frac{c-b}{a-b}$.

On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{2i\sqrt{3}-\left(3+i\sqrt{3}\right)}{2-\left(3+i\sqrt{3}\right)} = \frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{3-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$$

D'où : $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = \arg\frac{c-b}{a-b} = \arg\left(-i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et on conclut comme précédemment.

Une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est $\frac{\pi}{2}$.

Question 1.b.

Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Le triangle ABC étant rectangle en B, son hypoténuse est le segment $[\mathrm{AC}]$.

L'affixe du milieu de ce segment $[\mathrm{AC}]$ est $\omega = \frac{a+c}{2}$.

On a : $\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$.

L'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est égale à $\omega = 1+i\sqrt{3}$.

Une transformation du plan

Question 2.a.

Avec $n=0$, on a, en tenant compte de $z_0 = 0$: $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cancel{z_0} + 2 = 2 = a$.

Avec $n=1$, il vient : $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_1 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times 2 + 2 = 1+i\sqrt{3}+2 = 3+i\sqrt{3} = b$.

Avec $n=2$, il vient :

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_2 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \left(3+i\sqrt{3}\right) + 2 = \frac{\cancel{3}+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}\cancel{-3}}{2} + 2 = 2i\sqrt{3}+2$$

Enfin, avec $n=3$, on obtient :

$$z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_3 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \times \left(2i\sqrt{3}+2\right) + 2 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 + 2 = 2i\sqrt{3} = c$$

On a bien :

Les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :
$z_2 = 3+i\sqrt{3} = b$, $z_3 = 2i\sqrt{3}+2$ et $z_4 = 2i\sqrt{3} = c$

Comme, de surcroît, on a $z_1 = 2 = a$, on remarque que l'on a : $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_2 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_4 = \mathrm{C}$.

Question 2.b.

On a :

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{AB} = |z_2 - z_1| = \left|3+i\sqrt{3}-2\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 = \mathrm{BA}_3 = |z_3 - z_2| = \left|2+2i\sqrt{3}-\left(3+i\sqrt{3}\right)\right| = \left|-1+i\sqrt{3}\right| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$$

$$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 = \mathrm{A}_3\mathrm{C} = |z_4 - z_3| = \left|2i\sqrt{3}-\left(2+2i\sqrt{3}\right)\right| = |-2| = 2$$

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 = 2$$

Question 2.c.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2-\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1-i\sqrt{3}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\omega\right)&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{2}\\&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n-\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1-i\sqrt{3}\end{aligned}$$

On a bien :

Pour tout *n* entier naturel :

$$z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\omega\right)$$

Question 2.d.

Comme $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, on a : $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Pour tout *n* entier naturel, on a donc : $z_{n+1}-\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_n-\omega\right)$.

On en déduit immédiatement :

Le point A_{n+1} est l'image du point A_n par la rotation

de centre Ω d'affixe $\omega=1+i\sqrt{3}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Question 2.e.

D'après la question précédente, pour tout *n* entier naturel, on a :

$$\begin{aligned}z_{n+6}-\omega&=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+5}-\omega\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+4}-\omega\right)=e^{2i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+4}-\omega\right)\\&=e^{2i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+3}-\omega\right)=e^{3i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+3}-\omega\right)=e^{i\pi}\left(z_{n+3}-\omega\right)=-\left(z_{n+3}-\omega\right)\\&=-e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+2}-\omega\right)=-e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+1}-\omega\right)=-e^{2i\frac{\pi}{3}}\left(z_{n+1}-\omega\right)\\&=-e^{2i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_n-\omega\right)=-e^{3i\frac{\pi}{3}}\left(z_n-\omega\right)=-e^{i\pi}\left(z_n-\omega\right)\\&=z_n-\omega\end{aligned}$$

On peut aussi adopter une approche plus géométrique en rappelant que composer une rotation par elle-même équivaut à considérer la rotation de même centre et d'angle double. Ainsi, A_{n+2} est l'image de A_n par la rotation de centre Ω et d'angle $2\times\frac{\pi}{3}$. Plus généralement, pour tout entier naturel *k*, A_{n+k} est l'image de A_n par la rotation de centre Ω et d'angle $k\times\frac{\pi}{3}$.
Avec $k=6$, on en déduit que A_{n+6} est l'image de A_n par la rotation de centre Ω et d'angle $6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$. Or, cette rotation n'est rien d'autre que l'identité. Ainsi, on retrouve : $A_{n+6}=A_n$.

D'après le résultat que nous venons d'établir, il convient de raisonner modulo 6.
On a $2012=2010+2=6\times 335+2$. D'où : $2012\equiv 2\ [6]$
On en déduit immédiatement : $A_{2012}=A_2=B$.

Pour tout entier naturel *n*, les points A_{n+6} et A_n sont confondus.
$A_{2012}=A_2=B$.

Question 3.

On peut facilement montrer par récurrence que l'on a : $A_{n+1}A_n=A_1A_0=OA$ puisqu'une rotation conserve les distances.
On en déduit ainsi que pour tout entier naturel *n*, on a : $A_{n+1}A_n=OA=|a|=|2|=2$

Pour tout entier naturel *n* : $A_{n+1}A_n=2$.