Centres étrangers – Juin 2013 – Série S – Exercice

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- Les points $A(12;0;0)$, $B(0;-15;0)$, $C(0;0;20)$, $D(2;7;-6)$, $E(7;3;-3)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+y-2z-5=0$.

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x+y+2z-24=0$$

Affirmation 2
Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x=9-3t \\ y=0 \\ z=5+5t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Analyse

Plan (équation cartésienne) et droite (représentation paramétrique) de l'espace, position relative, orthogonalité... Des ingrédients classiques pour des méthodes qui se doivent d'être bien maîtrisées. Un bon exercice d'entraînement sans grosse difficulté.

Résolution

Affirmation 1.

Cette affirmation est **FAUSSE**.

En effet, Deux plans de l'espace sont parallèles si, dans un repère donné, les coefficients de *x*, *y* et *z* de leurs équations cartésiennes sont proportionnels. Comme cas particulier, il y a l'égalité. Ainsi, si les coefficients de *x* et *y* sont égaux (c'est le cas ici), les deux plans seront parallèles si, et seulement si, les coefficients de *z* le sont également. Dans l'équation cartésienne fournie pour le plan $\mathscr{P}$, il vaut -2 alors qu'il vaut 2 dans l'équation apparaissant dans l'affirmation 1. Celle-ci ne peut donc être vraie.

Affirmation 2.

Cette affirmation est **VRAIE**.

Notons dans un premier temps que la représentation paramétrique fournie est bien celle d'une droite puisque les coordonnées *x*, *y* et *z* s'expriment comme des fonctions affines du paramètre *t*. Notons alors $\mathscr{D}$ la droite correspondante. Nous allons montrer que A et C sont deux points de $\mathscr{D}$.

On a : $\mathrm{A}(12\,;0\,;0) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} 12 = 9 - 3t \\ 0 = 0 \\ 0 = 5 + 5t \end{cases}$.

Or, il vient facilement : $\begin{cases} 12 = 9 - 3t \\ 0 = 0 \\ 0 = 5 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = -3 \\ 5t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$.

Ainsi, A est le point de $\mathscr{D}$ correspondant à $t = -1$.

Par ailleurs : $\mathrm{C}(0\,;0\,;20) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} 0 = 9 - 3t \\ 0 = 0 \\ 20 = 5 + 5t \end{cases}$.

Or, on a : $\begin{cases} 0 = 9 - 3t \\ 0 = 0 \\ 20 = 5 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 9 \\ 5t = 15 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$.

Ainsi, C est le point de $\mathscr{D}$ correspondant à $t=3$.

Les points A et C étant deux points distincts de $\mathscr{D}$, on en déduit que les droites (AC) et $\mathscr{D}$ sont confondues. La représentation paramétrique fournie et bien une représentation paramétrique de la droite (AC).

Affirmation 3.

Cette affirmation est **FAUSSE**.

Bien que ce ne soit pas absolument indispensable, on peut rapidement vérifier que les points D et E n'appartiennent pas au plan $\mathscr{P}$.

Ensuite, on a facilement $\overrightarrow{DE}(5\,;-4\,;3)$. Ainsi, $\left(D,\overrightarrow{DE}\right)$ est un repère de la droite (DE) et on en tire immédiatement une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

On a alors :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in(\mathrm{DE})\cap\mathscr{P} \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\,/\begin{cases} x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \\ 2x+y-2z-5=0 \end{cases}$$

Mais :

$$\begin{cases} x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \\ 2x+y-2z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \\ 2(2+5t)+(7-4t)-2(-6+3t)-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+5t \\ y=7-4t \\ z=-6+3t \\ 18=0 \end{cases}$$

La dernière égalité du système étant fausse (pour toutes valeurs de x, y, z et t), il n'admet pas de solution. La droite (DE) est donc parallèle au plan $\mathscr{P}$: ils n'admettent pas de point d'intersection.

Affirmation 4.

Cette affirmation est **VRAIE**.

On a facilement $\overrightarrow{AB}\left(-12\,;-15\,;0\right)$ qui est colinéaire à $\vec{u}\left(4\,;5\,;0\right)$.
On a aussi : $\overrightarrow{AC}\left(-12\,;0\,;20\right)$ qui est colinéaire à $\vec{v}\left(3\,;0\,;-5\right)$.
Comme on travaille dans un repère orthonormé, on a :

$$\overrightarrow{DE}.\vec{u} = 5\times 4+\left(-4\right)\times 5+3\times 0 = 20-20+0 = 0$$
$$\overrightarrow{DE}.\vec{v} = 5\times 3+\left(-4\right)\times 0+3\times\left(-5\right) = 15+0-15 = 0$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, directeurs respectivement des droites $\left(AB\right)$ et $\left(AC\right)$, on en déduit que la droite $\left(DE\right)$ est orthogonale aux deux droites sécantes $\left(AB\right)$ et $\left(AC\right)$ du plan $\left(ABC\right)$. Ainsi, elle est perpendiculaire (orthogonale) à ce plan.