Pondichéry – Avril 2012 – Série S – Exercice

Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

- Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} : x-y-z-2=0 \text{ et } \mathscr{P}' : x+y+3z=0$$

- La droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-3-2t \\ y=2t \\ z=1+2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 2
La sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 3
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x=1-t' \\ y=-1-2t' \\ z=t' \end{cases} \quad t'\in\mathbb{R}$$

Proposition 4
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires.

Analyse

Quatre propositions pour pas mal de thèmes abordés finalement (orthogonalité droite-plan, distance d'un point à un plan, intersection de deux plans, représentation paramétrique d'une droite de l'espace, position relative de deux droites de l'espace) pour cet exercice de géométrie dans lespace. Si le niveau de difficulté reste raisonnable, il convient de bien connaître son cours et de se montrer précis dans la rédaction.

Résolution

La proposition 1 est vraie.

Le plan $\mathscr{P}$ admettant pour équation $x-y-z-2=0$ et l'espace étant rapporté à un repère orthonormé, il en découle immédiatement que le vecteur $\vec{n}(1\,;-1\,;-1)$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

Par ailleurs, d'après la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, celle-ci admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(-2\,;2\,;2)$.

On constate immédiatement que l'on a : $\vec{u}=-2\vec{n}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont donc colinéaires et la droite $\mathscr{D}$ est bien orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

La proposition 2 est fausse.

La sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, la distance $d(\mathrm{O}\,;\mathscr{P})$ du centre O au plan $\mathscr{P}$ est égale au rayon de la sphère, à savoir 2.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé et une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ étant $x-y-z-2=0$, il vient immédiatement :

$$d(\mathrm{O}\,;\mathscr{P})=\frac{|0-0-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Comme la distance $d(\mathrm{O}\,;\mathscr{P})$ n'est pas égale à 2, la sphère de centre O et de rayon 2 n'est pas tangente au plan $\mathscr{P}$.

La proposition 3 est vraie.

1ère approche.

Un point $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ appartient à l'intersection $\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient les équations cartésiennes de ses deux plans :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-z-2=0\\ x+y+3z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=z+2\\ x+y=-3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)+(x+y)=(z+2)-3z\\ y=-x-3z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-2z+2\\ y=-x-3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z+1\\ y=-(-z+1)-3z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z+1\\ y=-2z-1\end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{P}'\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z+1\\ y=-2z-1\end{cases}\Leftrightarrow\exists t'\in\mathbb{R}\,/\begin{cases}x=1-t'\\ y=-1-2t'\\ z=t'\end{cases}$$

Finalement, la représentation :

$$\begin{cases}x=1-t'\\ y=-1-2t' \qquad t'\in\mathbb{R}\\ z=t'\end{cases}$$

est bien une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

2ème approche.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles).

On en déduit immédiatement que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles et donc que leur intersection est bien une droite.

Par ailleurs, en prenant $t'=0$, on déduit que le point $\mathrm{A}(1\,;-1\,;0)$ est un point de Δ.

On constate facilement que les coordonnées du point A vérifient les équations des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Le point A appartient donc à leur intersection.

Enfin, d'après la représentation paramétrique de la droite Δ, celle-ci admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}(-1\,;-2\,;1)$.

Par ailleurs, le plan $\mathscr{P}'$ admettant pour équation $x+y+3z=0$ et l'espace étant rapporté à un repère orthonormé, il en découle immédiatement que le vecteur $\vec{n}'(1\,;1\,;3)$ est normal au plan $\mathscr{P}'$.
L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, il vient alors :

$$\vec{n}.\vec{v}=1\times(-1)+(-1)\times(-2)+(-1)\times1=-1+2-1=0$$
$$\vec{n}'.\vec{v}=1\times(-1)+1\times(-2)+3\times1=-1-2+3=0$$

Le vecteur $\vec{v}$ est ainsi orthogonal aux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ normaux aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

On déduit bien de ce qui précède que la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

La proposition 4 est fausse.

Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont coplanaires si, et seulement si, elles sont parallèles ou sécantes.

Les vecteurs $\vec{u}(-2\,;2\,;2)$ et $\vec{v}(-1\,;-2\,;1)$, respectivement directeur de $\mathscr{D}$ et Δ, ne sont pas colinéaires. Les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont donc pas parallèles.

Recherchons maintenant $\mathscr{D}\cap\Delta$.
Le point $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ appartient aux droites $\mathscr{D}$ et Δ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x=-3-2t \\ y=2t \\ z=1+2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=1-t' \\ y=-1-2t' \\ z=t' \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\begin{cases} -3-2t=1-t' \\ 2t=-1-2t' \\ 1+2t=t' \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 2t-t'=-4 \\ 2t+2t'=-1 \\ 2t-t'=-1 \end{cases}$$

On constate immédiatement que la première et la troisième équation sont incompatibles. Ce système n'admet pas de solution et on en déduit immédiatement que les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas sécantes.

Ni parallèles, ni sécantes, les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas coplanaires.