Amérique du Nord – Juin 2010 – Série S – Exercice

L’espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(1;-2;4) \quad \mathrm{B}(-2;-6;5) \quad \mathrm{C}(-4;0;-3)$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1;-1;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).

   Soit t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

   a. Démontrer que $t=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|}$.

   b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Analyse

Un exercice d'entraînement idéal pour appliquer certaines notions fondamentales de géométrie dans l'espace : orthogonalité, projetés orthogonaux, produit scalaire, droites et plans, etc. La troisième question, sans être à proprement parler délicate, aborde le thème de la projection orthogonale d'un point sur une droite, thème qui est loin d'être le plus apprécié par les élèves en général …

Résolution

Question 1.a.

Pour montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit, par exemple, de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Or, on a facilement : $\overrightarrow{AB}\left(-3;-4;1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-5;2;-7\right)$.

En considérant avec les abscisses et les ordonnées de ces vecteurs, on constate que : $\frac{-5}{-3}\neq\frac{2}{-4}$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires.

$$\boxed{\text{Les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

Question 1.b.

D'après la question précédente, les points A, B et C n'étant pas alignés, ils définissent bien un plan.

Pour montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal à ce plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$.

Le repère considéré étant orthonormal, on a facilement :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-3\times 1+\left(-4\right)\times\left(-1\right)+1\times\left(-1\right)=-3+4-1=0$$
$$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=-5\times 1+2\times\left(-1\right)+\left(-7\right)\times\left(-1\right)=-5-2+7=0$$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{n} \text{ est un vecteur normal au plan } \left(\text{ABC}\right).}$$

Question 1.c.

Le plan $\left(\text{ABC}\right)$ est l'ensemble des points $\text{M}\left(x,y,z\right)$ de l'espace qui vérifient : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Or, on a : $\overrightarrow{AM}(x-1; y+2; z-4)$. On en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \\ \Leftrightarrow\ &(x-1)\times 1+(y+2)\times(-1)+(z-4)\times(-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ &x-y-z-1-2+4=0 \\ \Leftrightarrow\ &x-y-z+1=0 \end{aligned}$$

Une équation du plan (ABC) est $x-y-z+1=0$.

Question 2.a.

La droite considérée étant orthogonale au plan (ABC), elle admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace appartient alors à cette droite si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. C'est-à-dire s'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{OM}=t\vec{n}$.
Or :

$$\overrightarrow{OM}=t\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$$

Finalement :

La droite passant par O et orthogonale au plan (ABC) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases} ,\ t\in\mathbb{R}$$

Question 2.b.

Puisque la droite considérée à la question précédente passe par O et est orthogonale au plan (ABC), son intersection avec ce plan n'est autre, par définition, que le projeté orthogonal du point O sur ce plan, c'est-à-dire le point O'.

Puisque le point O' est un point de cette droite, il existe un réel t tel que : $O'(t, -t, -t)$.
Par ailleurs, O' étant un point du plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation $x-y-z+1=0$. On a donc : $t-(-t)-(-t)+1=0$, soit $3t+1=0$ et, finalement : $t=-\frac{1}{3}$.

On en déduit immédiatement : $O'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{O'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)}$$

Question 3.a.

On a : $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}^2=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$.
Mais on a également :
$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}$.

Le point H étant le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC), le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite, en particulier au vecteur $\overrightarrow{BC}$. On a donc : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}=0$, puis $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ et enfin : $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{t=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}}$$

Question 3.b.

On a facilement : $B(-2;-6;5)\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}(-2;-6;5)\Leftrightarrow\overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$.
On en déduit :

$$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=2\times(-2)+6\times6+(-5)\times(-8)=-4+36+40=72$$

Et :

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=(-2)^2+6^2+(-8)^2=4+36+64=104$$

D'où :

$$t=\frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}=\frac{72}{104}=\frac{8\times9}{8\times13}=\frac{9}{13}$$

Il vient alors, en notant (x_H, y_H, z_H) les coordonnées du point H :

$$\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} = \frac{9}{13}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 2 = \frac{9}{13} \times (-2) \\ y_H + 6 = \frac{9}{13} \times 6 \\ z_H - 5 = \frac{9}{13} \times (-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{18}{13} - 2 \\ y_H = \frac{54}{13} - 6 \\ z_H = \frac{-72}{13} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\frac{44}{13} \\ y_H = -\frac{24}{13} \\ z_H = -\frac{7}{13} \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{t = \frac{9}{13} \text{ et } H\left(-\frac{44}{13}; -\frac{24}{13}; -\frac{7}{13}\right).}$$