Centres étrangers I – Série S – Juin 2000 – Exercice

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 km. Le plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ représente le sol.

Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et $\left(\mathrm{D}_2\right)$, dont on connaît des représentations paramétriques :

$$\left(\mathrm{D}_1\right):\begin{cases} x=3+a \\ y=9+3a \\ z=2 \end{cases} \text{ avec } a\in\mathbb{R} \qquad \left(\mathrm{D}_2\right):\begin{cases} x=0,5+2b \\ y=4+b \\ z=4-b \end{cases} \text{ avec } b\in\mathbb{R}$$

1. a. Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}_1$ directeur de la droite $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et d'un vecteur $\vec{u}_1$ directeur de la droite $\left(\mathrm{D}_2\right)$.

   b. Prouver que les droites $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et $\left(\mathrm{D}_2\right)$ ne sont pas coplanaires.

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3;4;0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit $\left(\mathrm{P}_1\right)$ le plan contenant S et $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et soit $\left(\mathrm{P}_2\right)$ le plan contenant S et $\left(\mathrm{D}_2\right)$.

   a. Montrer que $\left(\mathrm{D}_2\right)$ est sécante à $\left(\mathrm{P}_1\right)$.

   b. Montrer que $\left(\mathrm{D}_1\right)$ est sécante à $\left(\mathrm{P}_2\right)$.

   c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et $\left(\mathrm{D}_2\right)$.

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Analyse

Si cet exercice met en jeu des objets géométriques simples de l'espace (points, droites et plans), il requiert, entre autres, de maîtriser les principaux calculs vectoriels en coordonnées cartésiennes (produit scalaire et produit vectoriel).

Résolution

→ *Question 1.a.*

Les représentations paramétriques fournies nous permettent d'écrire directement : $\vec{u}_1(1,3,0)$ et $\vec{u}_2(2,1,-1)$, ces coordonnées correspondant aux coefficients de a et b respectivement dans chacune des représentations paramétriques.

On peut rapidement retrouver ce résultat comme suit : on considère un point M quelconque de la droite (D_1). Pour $a=0$ on obtient le point $A(3,9,2)$ de cette droite. On a alors :

$$\overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l} x-3=(3+a)-3=a \\ y-9=(9+3a)-9=3a \\ 2-2=0 \end{array}\right.$$

Soit : $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}_1$ avec $\vec{u}_1(1,3,0)$.

On procède de même pour obtenir $\vec{u}_2(2,1,-1)$.

Les vecteurs $\vec{u}_1(1,3,0)$ et $\vec{u}_2(2,1,-1)$ sont des vecteurs directeurs des droites (D_1) et (D_2), respectivement.

→ *Question 1.b.*

Tout d'abord, on constate que les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires puisque la troisième coordonnée de $\vec{u}_2$ n'est pas nulle (c'est une condition nécessaire puisque la troisième coordonnée de $\vec{u}_1$ l'est !). Les droites (D_1) et (D_2) ne sont donc pas parallèles.

Sont-elles sécantes ?

Pour cela, on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3+a=0,5+2b \\ 9+3a=4+b \\ 2=4-b \end{cases}$$

La troisième équation nous fournit immédiatement $b = 2$.
La première équation nous fournit alors : $a = 1,5$ et la deuxième : $a = -1$.
Le système n'admet donc pas de solution ; les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas sécantes.

Les droites (D_1) et (D_2) n'étant ni parallèles, ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

Les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

→ *Question 2.a.*

Nous disposons, sur la droite (D_1), du point $A(3,9,2)$.

On a alors : $\overrightarrow{AS}\left|\begin{array}{l} 3-3=0 \\ 4-9=-5 \\ 0,1-2=-1,9 \end{array}\right.$

Un vecteur $\vec{n}_1(x;y;z)$ est normal au plan (P_1) si, et seulement si, il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AS}$ et $\vec{u}_1$. Cette condition équivaut à : $\vec{n}_1.\overrightarrow{AS} = 0$ et $\vec{n}_1.\vec{u}_1 = 0$.
Le repère considéré étant orthonormal, on a :

$$\begin{cases} \vec{n}_1.\overrightarrow{AS} = 0 \\ \vec{n}_1.\vec{u}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y - 1,9z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{19}{50}z \\ x = -3y \end{cases}$$

En choisissant $z = 50$, on obtient immédiatement : $y = -19$ et $x = 57$.

Finalement, on a : $\vec{n}_1(57;-19;50)$.

Le plan (P_1) et la droite (D_2) sont sécants si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas orthogonaux. Or, on a : $\vec{n}_1.\vec{u}_2 = 57 \times 2 + (-19) \times 1 + 50 \times (-1) = 114 - 19 - 50 = 114 - 69 = 45$.
Comme $\vec{n}_1.\vec{u}_2 \neq 0$, les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas orthogonaux et (P_1) et (D_2) sont sécants.

La droite (D_2) et le plan (P_1) sont sécants.

→ *Question 2.b.*

Nous procédons comme précédemment.

Nous disposons, sur la droite (D_2), du point $B(0,5;4;4)$.

On a alors : $\overrightarrow{BS}\begin{vmatrix} 3-0,5=2,5 \\ 4-4=0 \\ 0,1-4=-3,9 \end{vmatrix}$

Un vecteur $\vec{n}_2\left(x;y;z\right)$ est normal au plan $\left(\mathrm{P}_2\right)$ si, et seulement si, il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BS}$ et $\vec{u}_2$. Cette condition équivaut à : $\vec{n}_2.\overrightarrow{BS}=0$ et $\vec{n}_2.\vec{u}_2=0$.
Le repère considéré étant orthonormal, on a :

$$\begin{cases} \vec{n}_2.\overrightarrow{BS}=0 \\ \vec{n}_2.\vec{u}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5x-3,9z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{39}{25}z \\ y=-2x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{39}{25}z \\ y=-\dfrac{78}{25}z+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{39}{25}z \\ y=-\dfrac{53}{25}z \end{cases}$$

En choisissant $z=25$, on obtient immédiatement : $y=-14$ et $x=39$.

Finalement, on a : $\vec{n}_2\left(39;-53;25\right)$.

Le plan $\left(\mathrm{P}_2\right)$ et la droite $\left(\mathrm{D}_1\right)$ sont sécants si, et seulement si, les vecteurs $\vec{n}_2$ et $\vec{u}_1$ ne sont pas orthogonaux. Or, on a : $\vec{n}_2.\vec{u}_1=39\times1+\left(-53\right)\times3+25\times0=39-115=-76$.
Comme $\vec{n}_2.\vec{u}_1\neq0$, les vecteurs $\vec{n}_2$ et $\vec{u}_1$ ne sont pas orthogonaux et $\left(\mathrm{P}_2\right)$ et $\left(\mathrm{D}_1\right)$ sont sécants.

En conclusion :

La droite $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et le plan $\left(\mathrm{P}_2\right)$ sont sécants.

→ *Question 2.c.*

Les deux plans $\left(\mathrm{P}_1\right)$ et $\left(\mathrm{P}_2\right)$ admettent une intersection non vide puisqu'ils contiennent tous deux le point *S*. Comme ils ne sont pas confondus (puisque les droites $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et $\left(\mathrm{D}_2\right)$ ne sont pas sécantes), on en tire qu'ils admettent une droite $\left(\mathrm{R}'\right)$ comme intersection, cette droite contenant le point *S*.

Nous allons montrer que la droite $\left(\mathrm{R}'\right)$ satisfait au problème posé, à savoir coupe les droites $\left(\mathrm{D}_1\right)$ et $\left(\mathrm{D}_2\right)$.

Nous avons vu, aux deux questions précédentes :

- Que l'intersection de $\left(\mathrm{P}_1\right)$ et $\left(\mathrm{D}_2\right)$ était non vide : $\left(\mathrm{P}_1\right)\cap\left(\mathrm{D}_2\right)=\left\{S_1\right\}$.
  Le point S_1 appartenant à $\left(\mathrm{D}_2\right)$, il appartient à $\left(\mathrm{P}_2\right)$. Puisqu'il appartient également à $\left(\mathrm{P}_1\right)$, on en déduit qu'il appartient à $\left(\mathrm{R}'\right)=\left(\mathrm{P}_1\right)\cap\left(\mathrm{P}_2\right)$.

- Que l'intersection de (P_2) et (D_1) était non vide : $(\mathrm{P}_2)\cap(\mathrm{D}_1)=\{S_2\}$.
  Le point S_2 appartenant à (D_1), il appartient à (P_1). Puisqu'il appartient également à (P_2), on en déduit qu'il appartient à $(\mathrm{R}')=(\mathrm{P}_1)\cap(\mathrm{P}_2)$.

Nous avons ainsi montré que les points S_1 et S_2 appartenaient à $(\mathrm{R}')=(\mathrm{P}_1)\cap(\mathrm{P}_2)$.

La droite (R'), intersection des plans (P_1) et (P_2), contient le point *S* et coupe les droites (D_1) et (D_2). Elle répond donc au problème posé.

La droite $(\mathbf{R}')$, intersection des plans $(\mathbf{P}_1)$ et $(\mathbf{P}_2)$, contient le point *S* et coupe les droites $(\mathbf{D}_1)$ et $(\mathbf{D}_2)$.

Note : à titre de vérification, on pourra montrer que les vecteurs $\overrightarrow{SS_1}$ et $\overrightarrow{SS_2}$ sont colinéaires (les calculs sont laissés au lecteur en guise d'entraînement).