

**1<sup>ère</sup> partie : Etude d'une fonction.**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^x - e^x - 8$ .

1. En écrivant  $f(x) = e^x(x-1) - 8$ , déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Montrer que  $f'(x) = xe^x$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
3. Dresser le tableau de variation complet de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
4. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $[0; +\infty[$  une unique solution  $a$ .  
b) Montrer que  $2,040 < a < 2,041$ .  
c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de  $f(x)$  en fonction des valeurs de  $x$  sur  $[0; +\infty[$ .
5. a) Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = xe^x - 2e^x - 8x$  est une primitive de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .  
b) Calculer la valeur exacte de  $\int_3^5 f(x) dx$ .

**2<sup>ème</sup> partie : Application à une situation économique**

Une entreprise fabrique  $x$  milliers d'objets avec  $x$  appartenant à  $[0; 5]$ .

La fonction  $f$  de la 1<sup>ère</sup> partie modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaine d'euros.

Pour une quantité  $x$  donnée, si  $f(x)$  est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si  $f(x)$  est négatif, l'entreprise subit une perte.

En utilisant les résultats de la 1<sup>ère</sup> partie, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. A partir de combien d'objets produits, l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices ?

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.

Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur  $[0;5]$  (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

---

## Analyse

Une structure d'exercice classique : une première partie consacrée à l'étude du modèle (ici celui du bénéfice réalisé en fonction de la production) et, dans un deuxième temps, une exploitation de cette étude (ici, pour évaluer un bénéfice moyen).

---

## Résolution

### 1<sup>ère</sup> partie : Etude d'une fonction

#### Question 1.

On a :  $f(x) = e^x(x-1) - 8$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

On en déduit (produit) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(x-1)] = +\infty$  puis, immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

#### Question 2.

Pour tout  $x$  réel positif, on a :

$$f'(x) = \cancel{1 \times e^x} + x \times e^x \cancel{- e^x} + 0 = x \times e^x = x e^x$$

$$f'(x) = x e^x$$

#### Question 3.

On a immédiatement :

- $f'(0) = 0 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$  ;
- Pour tout  $x$  réel strictement positif,  $f'(x) > 0$  comme produit de deux réels strictement positifs.

On déduit immédiatement de ce qui précède que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Comme on a calculé la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ , il nous reste à évaluer  $f(0)$ .

On a :

$$f(0) = 0 \times e^0 - e^0 - 8 = 0 - 1 - 8 = -9$$

Forts des éléments précédents, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  :

|         |    |           |
|---------|----|-----------|
| $x$     | 0  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +  |           |
| $f$     | -9 | $+\infty$ |

#### Question 4.a.

La fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  puisqu'elle y est dérivable.

A la question précédente, nous avons également vu qu'elle y était strictement croissante.

On a par ailleurs :  $f(0) = -9$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $f$  prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle  $[-9; +\infty[$ .

On en déduit :

L'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $a$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

#### Question 4.b.

On a :

$$f(2,040) \approx -1,77 \times 10^{-3} < 0$$

$$f(2,041) \approx 1,4 \times 10^{-2} > 0$$

D'où, immédiatement :

$$2,040 < a < 2,041$$

### Question 4.c.

Comme la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et que l'on a  $f(a) = 0$ , il vient immédiatement :

- Pour tout  $x$  dans l'intervalle  $[0; a[$ ,  $f(x) < 0$ .
- $f(a) = 0$ .
- Pour tout  $x$  dans l'intervalle  $]a; +\infty[$ ,  $f(x) > 0$ .

### Question 5.a.

La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel  $x$  positif, on a :

$$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x - 2e^x - 8 \times 1 = e^x + x e^x - 2e^x - 8 = x e^x - e^x - 8 = f(x)$$

On déduit de ce qui précède :

La fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x e^x - 2e^x - 8x$  est une primitive de la fonction  $f$  sur cet intervalle.

### Question 5.b.

On a :

$$\begin{aligned} \int_3^5 f(x) dx &= [g(x)]_3^5 \\ &= [x e^x - 2e^x - 8x]_3^5 \\ &= 5 \times e^5 - 2 \times e^5 - 8 \times 5 - (3 \times e^3 - 2 \times e^3 - 8 \times 3) \\ &= 3e^5 - 40 - (e^3 - 24) \\ &= 3e^5 - e^3 - 16 \end{aligned}$$

$$\int_3^5 f(x) dx = 3e^5 - e^3 - 16$$

## 2<sup>ème</sup> partie : Application à une situation économique

### Question 1.

A la question 4.c. de la première partie, nous avons établi que la fonction  $f$  prenait des valeurs strictement positives pour tout réel  $x$  strictement supérieur à  $a$ . Par ailleurs, à la question 4.b. de cette même partie, nous avons obtenu l'encadrement :  $2,040 < a < 2,041$ . Puisque la variable  $x$  mesure une quantité en milliers d'objets, on en déduit immédiatement :

L'entreprise dégagera des bénéfices à partir de 2041 objets produits.

### Question 2.

Pour obtenir la valeur moyenne du bénéfice pour une production comprise entre 3 et 5 milliers d'objets, on commence par calculer la valeur moyenne  $m$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[3; 5]$ . En utilisant le résultat obtenu à la question 5.b. de la première partie, il vient :

$$m = \frac{1}{5-3} \int_3^5 f(x) dx = \frac{1}{2} (3e^5 - e^3 - 16)$$

Puisque  $f(x)$  correspond à des centaines d'euros et que le résultat est demandé à l'euro près, nous donnons une valeur approchée de  $m$  arrondie à  $10^{-2}$  :

$$m = \frac{1}{2} (3e^5 - e^3 - 16) \approx 204,58$$

On en conclut alors :

Pour une production comprise entre 3 et 5 milliers d'objets, le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise s'élève à 20 458 euros (valeur arrondie à l'euro).