

## France Métropolitaine – Série ES – Juin 2004 – Exercice

La subvention accordée par une entreprise à son club sportif était de 3 000 € pour l'année 1998.

Depuis 1998, l'évolution de la subvention en pourcentage d'une année à l'autre est celle décrite dans le tableau ci-dessous :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Evolution en pourcentage	+17%	+15%	+10%	+9%	+6%

*Par exemple, le taux d'évolution de la subvention de 2000 à 2001 est de 10%.*

1.
  - a. Calculer, pour chacune des années, le montant de la subvention attribuée (en euros).  
Les résultats seront arrondis à l'unité. **[1pt]**
  - b. Le responsable sportif se plaint d'une diminution continue des subventions depuis l'année 1999. Quelle confusion fait-il ? **[0,5pt]**
  
2. On admet que le montant de la subvention en 2003 est de 5 130 €
  - a. Calculer le pourcentage de diminution ou d'augmentation de la subvention de 1998 à 2003. **[1pt]**
  - b. Si le taux d'évolution de la subvention d'une année à l'autre était fixe et égal à  $t\%$ , quelle serait la valeur de  $t$  arrondie à  $10^{-3}$  près qui donnerait la même augmentation de la subvention entre 1998 et 2003 ? **[1,5pt]**
  - c. Avec ce même taux d'évolution  $t$ , quelle serait la subvention, arrondie à l'unité, en 2004 ? **[1pt]**

---

## Analyse

Le début de l'exercice propose des calculs classiques de pourcentages.

La question 2.b. en revanche requiert de maîtriser la notion de pourcentage (annuel) moyen.

---

## Résolution

### → Question 1.a.

On peut mener les calculs en ayant recours au formalisme des suites.

Soit  $s_n$  la subvention, en euros, accordée l'année  $1998 + n$ .

On a alors, en tenant compte de l'énoncé :  $s_0 = 3\,000$ .

En utilisant le tableau et en arrondissant les résultats à l'unité, il vient alors :

$$s_1 = \left(1 + \frac{17}{100}\right) s_0 = 1,17 \times 3\,000 = \boxed{3\,510}$$

$$s_2 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) s_1 = 1,15 \times 3\,510 \simeq \boxed{4\,037}$$

$$s_3 = \left(1 + \frac{10}{100}\right) s_2 = 1,1 \times 4\,037 \simeq \boxed{4\,441}$$

$$s_4 = \left(1 + \frac{9}{100}\right) s_3 = 1,09 \times 4\,441 \simeq \boxed{4\,841}$$

$$s_5 = \left(1 + \frac{6}{100}\right) s_4 = 1,06 \times 4\,841 \simeq \boxed{5\,131}$$

On peut alors regrouper ses résultats en complétant le tableau fourni dans l'énoncé :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Evolution en pourcentage	+17%	+15%	+10%	+9%	+6%
Montant (en €)	3 510	4 037	4 441	4 841	5 131

### → Question 1.b.

Les pourcentages d'augmentation annuelle de la subvention étant positifs, celle-ci ne cesse de croître, contrairement à ce qu'estime le responsable sportif.

En revanche, ces mêmes pourcentages, eux, diminuent.

**Le responsable sportif confond l'évolution de la valeur de la subvention avec celle de son pourcentage d'augmentation annuelle.**

→ *Question 2.a.*

En 1998, le montant de la subvention était de 3 000 €. On admet qu'il est de 5 130 € en 2003.

Le montant de la subvention ayant augmenté, le pourcentage cherché est un pourcentage d'augmentation.

Il est donné par :

$$\frac{5130 - 3000}{3000} \times 100 = \frac{2130}{3000} \times 100 = \frac{213}{3} = 71$$

**Le montant de la subvention a augmenté de 71% entre 1998 et 2003.**

→ *Question 2.b.*

Supposons donc que le pourcentage d'augmentation annuelle de la subvention soit constant et égal à  $t$ .

Entre 1998 et 2003 ont lieu cinq augmentations successives.

On a donc l'égalité :

$$5130 = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 \times 3000$$

Il vient alors :

$$1 + \frac{t}{100} = \left(\frac{5130}{3000}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{171}{100}\right)^{\frac{1}{5}} = 1,71^{\frac{1}{5}}$$

D'où :

$$t = 100 \times \left(1,71^{\frac{1}{5}} - 1\right)$$

A la calculatrice, on obtient :  $t \simeq 11,327$  (valeur approchée à  $10^{-3}$  près).

Note : on aurait directement pu mener le calcul précédent en raisonnant sur le pourcentage obtenu à la question précédente en écrivant :  $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 1,71$ . Cette égalité est plus générale dans son esprit et la valeur obtenue ci-dessus s'interprète alors comme suit :

**Une augmentation globale sur cinq périodes de 71% correspond à une augmentation moyenne d'environ 11,327% par période.**

→ *Question 2.c.*

On cherche ici à calculer  $s_6$ .

En considérant toujours que l'on a  $s_5 = 5130$ , il vient :

$$s_6 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times s_5 = \left(1 + \frac{11,327}{100}\right) \times 5130 \simeq 5711$$

**En considérant une augmentation annuelle de 11,327%, la subvention s'élèverait en 2004 à 5 711 € (valeur arrondie à l'unité).**