Pondichéry – Avril 2006 – Série S – Exercice

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.
Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $\left[0;+\infty\right[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = -\frac{1}{20} y(3 - \ln y)$$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
   Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $\left[0;+\infty\right[$, vérifie, pour tout t de $\left[0;+\infty\right[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left[3 - \ln\left(f(t)\right)\right]$ si, et seulement si, la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $\left[0;+\infty\right[$:
   $$g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$$

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
   $$(H) \quad z' = \frac{1}{20} z - \frac{3}{20}$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $\left[0;+\infty\right[$:
   $$f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$
   (la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
   $$f(t) = \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b) Déterminer le sens de variation de f sur $\left[0;+\infty\right[$.
c) Résoudre dans $\left[0;+\infty\right[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 20 individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50% d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1% des cas. »

On note M l'événement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'événement contraire et T l'événement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Analyse

Un mélange (assez inhabituel) « équations différentielle – probabilités ». La résolution de l'équation différentielle de la première partie se ramène classiquement à une équation du programme de la forme $z' = az + b$. Quand à la second partie, elle est très classique et certainement familière à de très nombreux(ses) élèves.

Résolution

Partie A

→ *Question 1.*

On considère une fonction *f* dérivable et strictement positive sur $[0;+\infty[$.

Puisque la fonction *f* prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction *g* est bien définie sur cet intervalle.

Par ailleurs, la fonction *f* est dérivable sur $[0;+\infty[$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Or, la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que la fonction g, composée de f et de la fonction logarithme népérien, est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on a $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.

On a donc, pour tout *t* réel strictement positif : $(\ln f)'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$.

Dans ces conditions, pour tout *t* réel strictement positif :

$$f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left[3 - \ln\left(f(t)\right)\right] \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{20}\left[3 - \ln\left(f(t)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}(\ln f)(t) \Leftrightarrow (\ln f)'(t) = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}(\ln f)(t)$$

$$\Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$$

Une fonction *f* dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$ vérifie, pour tout *t* de $[0;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left[3 - \ln\left(f(t)\right)\right]$, si et seulement si, la fonction $g = \ln f$ vérifie, pour tout *t* de $[0;+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20} g(t) - \frac{3}{20}$.

→ *Question 2.*

On sait que les solutions d'une équation différentielle de la forme $z' = az + b$ (avec $a \neq 0$) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto z(t) = -\frac{b}{a} + C.e^{at}$ où C est une constante réelle.

L'équation différentielle (H) est une équation différentielle de cette forme avec $a = \frac{1}{20}$ et $b = -\frac{3}{20}$. On a donc : $-\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = 3$.

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions z définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto z(t) = 3 + C.e^{\frac{t}{20}}$$

La solution générale de l'équation différentielle $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$ est de la forme :

$$\boldsymbol{t \mapsto z(t) = 3 + C.e^{\frac{t}{20}}}$$

où C est une constante réelle.

→ *Question 3.*

D'après la question 1., la fonction $g = \ln f$ est solution de l'équation différentielle (H). Il existe donc une constante réelle C telle que, pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, on ait :

$$g(t) = 3 + Ce^{\frac{t}{20}} = 3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

Comme, pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a : $g(t) = (\ln f)(t) = \ln(f(t))$, il vient :

$$\ln(f(t)) = 3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

On en tire, en utilisant $a = b \Rightarrow e^a = e^b$:

$$\exp[\ln(f(t))] = f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

Conclusion :

Il existe un réel C tel que, pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$:

$$\boldsymbol{f(t) = \exp\left(3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)}$$

→ *Question 4.a.*

Le sujet fournit l'expression de $f(t)$. Arrêtons-nous un instant sur ce point.

L'effectif de l'échantillon est modélisé par la fonction *f*. Or, $f(t)$ s'exprime en milliers et l'effectif initial ($t=0$) est égal à mille. On a donc : $f(0)=1$.

On a alors l'équivalence :

$$f(0)=1 \Leftrightarrow \exp\left(3+C\exp\left(\frac{0}{20}\right)\right)=1 \Leftrightarrow \exp(3+C)=1 \Leftrightarrow 3+C=0 \Leftrightarrow C=-3$$

D'où l'expression de $f(t)$.

On a : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{20}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

On en tire $\lim\limits_{t\to+\infty}\exp\left(\frac{t}{20}\right)=+\infty$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]=-\infty$.

Et enfin : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right]=-\infty$.

Comme : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, il vient finalement : $\lim\limits_{t\to+\infty}\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t)=0}$$

→ *Question 4.b.*

Puisque la fonction *f* est solution de l'équation différentielle (E), on a, pour tout réel *t* de l'intervalle $[0;+\infty[$: $f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left(3-\ln\left(f(t)\right)\right)$.

La fonction f prenant des valeurs strictement positives, le signe de $f'(t)$ est donc celui du produit : $-\frac{1}{20}\left(3-\ln\left(f(t)\right)\right)$.

Pour tout réel *t* strictement positif, on a :

$$3-\ln\left(f(t)\right)=3-\ln\left[\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)\right]=3-3+3\exp\left(\frac{t}{20}\right)=3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

On a immédiatement : $3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ et donc : $-\frac{1}{20}\left(3-\ln\left(f(t)\right)\right)<0$.

On en déduit finalement que pour tout réel t strictement positif, $f'(t)$ est strictement négatif.

Conclusion :

La fonction *f* est strictement décroissante.

→ *Question 4.c.*

On a :

$$
\begin{aligned}
f(t)<0,02 &\Leftrightarrow \exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)<0,02 && \text{(expression de } f(t)\text{)}\\
&\Leftrightarrow 3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)<\ln 0,02 && \text{(croissance stricte du logarithme népérien)}\\
&\Leftrightarrow \frac{3-\ln 0,02}{3}<\exp\left(\frac{t}{20}\right) && \\
&\Leftrightarrow 1+\frac{1}{3}\ln 50<\exp\left(\frac{t}{20}\right) && \text{(propriétés algébriques du logarithme népérien : } -\ln 0,02=\ln\frac{1}{0,02}=\ln 50\text{)}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{3}\ln 50\right)<\frac{t}{20} && \text{(croissance stricte du logarithme népérien)}\\
&\Leftrightarrow t>20\ln\left(1+\frac{1}{3}\ln 50\right) &&
\end{aligned}
$$

Or, $20\ln\left(1+\frac{1}{3}\ln 50\right)\simeq 16,693$ (à 10^{-3} près).

20 individus correspondant à 0,02 millier d'individus, on en conclut finalement :

La taille de l'échantillon sera strictement inférieure à 20 individus au bout de 17 ans.

Partie B

→ *Question 1.*

Puisque la population testée comporte 50% d'animaux malades, on a immédiatement :

$$P(M) = 50\% = 0,5 = \frac{1}{2}$$

L'énoncé précise également que si un animal est malade, alors le test est positif dans 99% des cas. On a donc :

$$P_M(T) = 99\% = 0,99 = \frac{99}{100}$$

Enfin, si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1% des cas. D'où :

$$P_{\overline{M}}(T) = 0,1\% = 0,001 = \frac{1}{1000}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(M) = \frac{1}{2},\ P_M(T) = \frac{99}{100}\ \text{et}\ P_{\overline{M}}(T) = \frac{1}{1000}}}$$

→ *Question 2.*

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P\left(T \cap \overline{M}\right) \\ &= P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)P\left(\overline{M}\right) \end{aligned}$$

En tenant compte de $P\left(\overline{M}\right) = 1 - P(M)$ et des valeurs numériques obtenues à la question précédente :

$$\begin{aligned} P(T) &= P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)\left[1 - P(M)\right] \\ &= P_{\overline{M}}(T) + P(M)\left[P_M(T) - P_{\overline{M}}(T)\right] \\ &= \frac{1}{1000} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{99}{100} - \frac{1}{1000}\right) \\ &= \frac{1}{1000} + \frac{989}{2000} \\ &= \frac{991}{2000} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{P(T) = \frac{991}{2000} = 0{,}4955}$$

→ *Question 3.*

On cherche dans cette question : $P_T(M)$.

On a :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{2}}{\frac{991}{2000}} = \frac{990}{991}$$

Or : $\frac{990}{991} \simeq 0{,}998\,99$ (valeur approchée à 10^{-5}). On a donc : $P_T(M) < 0{,}999$.

Conclusion :

Le test ne peut être considéré comme fiable.