Pondichéry – Avril 2012 – Série S – Exercice

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A.

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
A la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. A l'issue de chaque étape combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1;50]$.
   - L'écriture « x :=y » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b , c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	a := 0 ; b := 0 ; c := 0 ; d := 0 ; e :=0
Traitement	Tant que ($a = b$) ou ($a = c$) ou ($a = d$) ou ($a = e$) ou ($b = c$) ou ($b = d$) ou ($b = e$) ou ($c = d$) ou ($c = e$) ou ($d = e$) Début du tant que a = rand(1, 50) ; b = rand(1, 50) ; c = rand(1, 50) ; d = rand(1, 50) ; e = rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ?

$L_1 = \{2\,;11\,;44\,;2\,;15\}$; $L_2 = \{8\,;17\,;41\,;34\,;6\}$

$L_3 = \{12\,;17\,;23\,;17\,;50\}$; $L_4 = \{45\,;19\,;43\,;21\,;18\}$

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. A l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Etablir que la probabilité qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :
- Il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- Il n'a pas été contrôlé ;
- Il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'événement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $p(T) = 0,05$.

On appelle D l'événement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100%, on sait que :

- Si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97% des cas.
- Si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1% des cas.

1. Calculer $p(D)$.
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Analyse

Un exercice de probabilité somme toute assez classique avec un peu de tout (dénombrement, loi binomiale, inversion de l'arbre de probabilité) et … un algorithme ! Ceux-ci arrivent, à un niveau encore assez simple mais la tendance est en place et cet exercice et d'autres montrent que nous pourrons trouver de tels algorithmes dans des domaines divers. Qu'on se le dise !

Résolution

Partie A

Question 1.

Le nombre de groupes différents de 5 coureurs pouvant être choisis à la fin de chaque étape est égal au nombre de possibilité de choisir 5 éléments dans un ensemble qui en comporte 50, soit :

$$\begin{aligned}\binom{50}{5} &= \frac{50!}{5!\,45!} \\ &= \frac{50\times 49\times 48\times 47\times 46}{5\times 4\times 3\times 2} \\ &= \frac{5\times \cancel{10}\times 49\times 4\times \cancel{12}\times 47\times 46}{\cancel{10}\times \cancel{12}} \\ &= 5\times 49\times 4\times 47\times 46 \\ &= 2\,118\,760\end{aligned}$$

A la fin de chaque étape, on peut choisir 2 118 760 groupes différents de 5 coureurs.

Question 2.a.

La boucle de la partie « Traitement » de l'algorithme est exécutée aussi longtemps qu'au moins deux parmi les 5 entiers *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sont égaux. Ainsi, l'algorithme ne s'achèvera que lorsque les 5 entiers seront deux à deux distincts. De fait, les ensembles L_1 et L_3 ne peuvent être obtenus avec l'algorithme proposé. Les deux autres comportent bien 5 entiers deux à deux distincts compris entre 1 et 50.

Les ensembles L_2 et L_4 ont pu être obtenus avec l'algorithme proposé.

Question 2.b.

L'algorithme permettant d'obtenir deux entiers deux à deux distincts compris entre 1 et 50, on peut l'utiliser pour choisir au hasard 5 coureurs, via leur numéro, parmi les 50 coureurs participant à la course.

L'algorithme permet de choisir, à la fin de chaque étape, 5 coureurs qui subiront le contrôle antidopage.

Question 3.

On a vu à la question 1. que l'on pouvait constituer $\binom{50}{5}$ groupes de 5 coureurs à partir des 50 participants.
A combien de ces groupes appartient un coureur donné ?
Pour constituer un groupe comportant un coureur donné, il suffit de choisir 4 coureurs parmi les 49 autres coureurs. Il y a $\binom{49}{4}$ façons possibles de le faire.
Ainsi, la probabilité cherchée vaut :

$$\frac{\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = \frac{\frac{49!}{4!\times(49-4)!}}{\frac{50!}{5!\times(50-5)!}} = \frac{49!}{4!\times \cancel{45!}} \times \frac{5!\times \cancel{45!}}{50!} = \frac{49!}{50!} \times \frac{5!}{4!} = \frac{1}{50} \times 5 = \frac{1}{10}$$

A l'issue d'une étape donnée, la probabilité qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle antidopage de cette étape est égale à $\frac{1}{10}$.

Question 4.a.

Les choix des 5 coureurs à l'issue d'une étape étant indépendants et la probabilité qu'un coureur donné soit contrôlé à l'issue d'une étape valant à chaque étape $\frac{1}{10}$, nous pouvons affirmer que le contrôle d'un coureur sur les 10 étape peut être modélisé par un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X comptabilisant le nombre de contrôles subis suit ainsi une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$.

Question 4.b.

On cherche d'abord $p(\mathrm{X}=5)$ (« Etre contrôlé 5 fois exactement »).

On a :

$$\begin{aligned}
p(\mathrm{X}=5) &= \binom{10}{5}\times\left(\frac{1}{10}\right)^{5}\times\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10-5} \\
&= \frac{10!}{5!\times(10-5)!}\times\frac{1}{10^5}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{5} \\
&= \frac{10!}{(5!)^2}\times\frac{9^5}{10^{10}} \\
&= \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2}\times\frac{9^5}{10^{10}} \\
&= \frac{\cancel{10}\times6\times\cancel{12}\times7\times6}{\cancel{10}\times\cancel{12}}\times\frac{9^5}{10^{10}} \\
&= 252\times\frac{9^5}{10^{10}} \\
&\simeq 0,0015
\end{aligned}$$

On cherche ensuite $p(\mathrm{X}=0)$ (« Ne pas être contrôlé »).

On a :

$$\begin{aligned}
p(\mathrm{X}=0) &= \binom{10}{0}\times\left(\frac{1}{10}\right)^{0}\times\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10} \\
&= 1\times1\times\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \\
&\simeq 0,3487
\end{aligned}$$

On cherche enfin $p(\mathrm{X}\geq 1)$ (« Etre contrôlé au moins une fois »).

On va raisonner avec l'événement contraire et utiliser le résultat du calcul précédent :

$$\begin{aligned}
p(\mathrm{X}\geq1) &= 1-p(\mathrm{X}<1) \\
&= 1-p(X=0) \\
&= 1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \\
&\simeq 0,6513
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered} p(\mathrm{X}=5)=252\times\frac{9^5}{10^{10}}\simeq 0,0015,\ p(\mathrm{X}=0)=\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\simeq 0,3487 \\ \text{et } p(\mathrm{X}\geq1)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\simeq 0,6513 \end{gathered}}$$

Partie B.

Question 1.

D'après l'énoncé, nous avons $p(T)=0,05$, $p_D(T)=0,97$ et $p_{\overline{D}}(T)=0,01$.

Nous cherchons $p(D)=x$

Les événements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers et la formule des probabilités totales nous donne :

$$\begin{aligned}
p(T) &= p(T\cap D)+p(T\cap\overline{D})\\
&= p_D(T)\times p(D)+p_{\overline{D}}(T)\times p(\overline{D})\\
&= p_D(T)\times p(D)+p_{\overline{D}}(T)\times\left(1-p(D)\right)\\
&= p_{\overline{D}}(T)+\left(p_D(T)-p_{\overline{D}}(T)\right)\times p(D)
\end{aligned}$$

D'où :

$$0,05=0,01+(0,97-0,01)x=0,01+0,96x$$

Alors : $0,05-0,01=0,96x$ et, finalement : $x=\frac{0,04}{0,96}=\frac{4}{96}=\frac{1}{24}$.

$$\boxed{p(D)=\frac{1}{24}}$$

Question 2.

On cherche ici $p_T(\overline{D})$.

Par définition, on a : $p_T(\overline{D})=\frac{p(T\cap\overline{D})}{p(T)}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
p_T(\overline{D}) &= \frac{p(T\cap\overline{D})}{p(T)}=\frac{p_{\overline{D}}(T)\times p(\overline{D})}{p(T)}=\frac{p_{\overline{D}}(T)\times\left(1-p(D)\right)}{p(T)}\\
&= \frac{0,01\times\left(1-\frac{1}{24}\right)}{0,05}=\frac{0,01}{0,05}\times\frac{23}{24}=\frac{1}{5}\times\frac{23}{24}=\frac{23}{120}\simeq 0,19
\end{aligned}$$

La probabilité qu'un coureur contrôlé positif ne soit pas dopé est égale à $\frac{23}{120}$ soit environ 0,19.

Remarque : dans cette deuxième partie, les probabilités conditionnelles de l'énoncé semblent flatteuses quant à la pertinence du test ($p_D\left(T\right)=0,97$ et $p_{\bar{D}}\left(T\right)=0,01$) mais cette dernière question nous conduits à être nettement plus prudents ! Ce qu'il faut, fondamentalement, c'est que, le test étant positif, la probabilité que le coureur soit dopé soit la plus élevée possible. Or ici, elle n'est « que » de $1-\frac{23}{120}=\frac{97}{120}$.