

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- Un assortiment de macarons, choisi par 50% des clients ;
- Une part de tarte tatin, choisie par 30% des clients.

20% des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurant a remarqué que :

- Parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80% prennent un café.
- Parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café.
- Parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90% prennent un café.

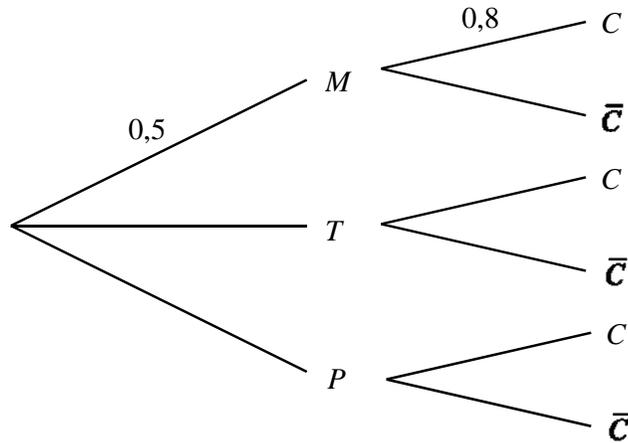
On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :

- M l'événement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'événement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'événement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'événement : « Le client prend un café » et \bar{C} l'événement contraire de C .

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $p_T(C)$, probabilité de l'événement C sachant que T est réalisé.

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'événement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.
 b. Montrer que $p(C) = 0,76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*)
5. Un assortiment de macarons est vendu 6€, une part de tarte tatin est vendue 7€ et un café est vendu 2€
 Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18€, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.
 - a. Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme dépensée par un client ?
 - b. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

sommes s_i	18	20	24
$p(s_i)$	0,02	0,18	...			

- c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter le résultat.

Analyse

Un exercice de baccalauréat classique sur le thème des probabilités : probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales et loi de probabilités simple en sont les principaux ingrédients.

Résolution

Question 1.

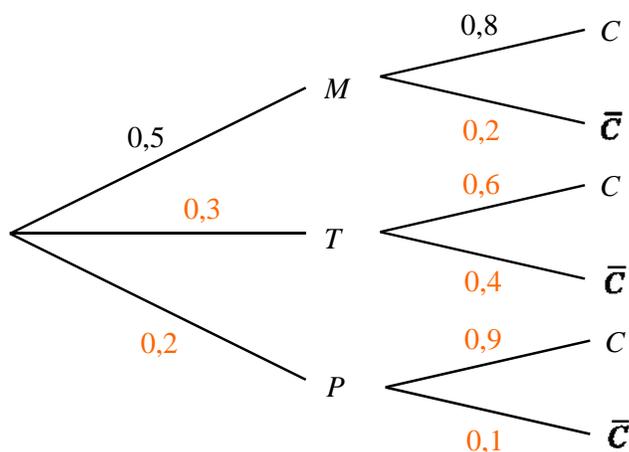
Dans l'énoncé, il est précisé que 30% des clients choisissent la part de tarte tatin. On a donc immédiatement :

$$p(T) = 0,3$$

$p_T(C)$ correspond à la probabilité qu'un client ayant choisi la part de tarte tatin prenne un café. Dans l'énoncé, on précise que « parmi les client ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café. On a donc :

$$p_T(C) = 0,6$$

Question 2.



La probabilité $p(T)$ a été donnée à la question précédente.

Comme les événements M , T et P forment une partition de l'univers, on a :

$$p(M) + p(T) + p(P) = 1$$

$$\text{Donc : } p(P) = 1 - (p(M) + p(T)) = 1 - (0,5 + 0,3) = 0,2.$$

La somme des probabilités conditionnelles issues d'un même nœud de l'arbre vaut toujours 1. Ainsi, on a : $p_M(C) + p_M(\bar{C}) = 1$. D'où : $p_M(\bar{C}) = 1 - p_M(C) = 1 - 0,8 = 0,2$.

L'énoncé précise que parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café. On a donc : $p_T(C) = 0,6$.

Comme $p_T(C) + p_T(\bar{C}) = 1$, il vient : $p_T(\bar{C}) = 1 - p_T(C) = 1 - 0,6 = 0,4$.

Enfin, l'énoncé précise que parmi les clients ne prenant pas de dessert, 90% prennent un café. On a donc : $p_P(C) = 0,9$.

Comme $p_P(C) + p_P(\bar{C}) = 1$, il vient : $p_P(\bar{C}) = 1 - p_P(C) = 1 - 0,9 = 0,1$.

Question 3.a.

L'événement $M \cap C$ correspond à « Le client prend un assortiment de macarons et un café ».

$$\text{On a : } p(M \cap C) = p_M(C) \times p(M) = 0,8 \times 0,5 = 0,4.$$

$$p(M \cap C) = 0,4$$

Question 3.b.

Les événements M, T et P formant une partition de l'univers, on a la formule des probabilités totales :

$$p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C)$$

On vient de calculer $p(M \cap C)$.

Nous calculons les deux autres probabilités de façon analogue :

$$p(T \cap C) = p_T(C) \times p(T) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

$$p(P \cap C) = p_P(C) \times p(P) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$$

$$\text{D'où : } p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C) = 0,4 + 0,18 + 0,18 = 0,76.$$

$$p(C) = 0,76$$

Question 4.

Dans cette question, on cherche $p_C(M)$.

On a :

$$p_C(M) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = \frac{0,4}{0,76} = \frac{40}{76} = \frac{4 \times 10}{4 \times 19} = \frac{10}{19} \approx 0,53$$

La probabilité qu'un client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café est égale à $\frac{10}{19}$ soit environ 0,53 (à 10^{-2}).

Question 5.a.

Le client paie systématiquement 18€ auxquels s'ajoutent le prix d'un éventuel dessert et d'un éventuel café. Nous pouvons réunir les 6 situations possibles dans le tableau suivant :

Choix	Evénement	Prix payé
Macarons et café	$M \cap C$	$18 + 6 + 2 = 26$
Macarons sans café	$M \cap \bar{C}$	$18 + 6 = 24$
Tarte tatin et café	$T \cap C$	$18 + 7 + 2 = 27$
Tarte tatin sans café	$T \cap \bar{C}$	$18 + 7 = 25$
Pas de dessert et café	$P \cap C$	$18 + 2 = 20$
Pas de dessert et pas de café	$P \cap \bar{C}$	18

Les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client sont : 18, 20, 24, 25, 26 et 27.

Question 5.b.

D'après la question 3.b. on a immédiatement :

$$p(26) = p(M \cap C) = 0,4$$

$$p(27) = p(T \cap C) = 0,18$$

$$p(20) = p(P \cap C) = 0,18$$

On a ensuite :

$$p(24) = p(M \cap \bar{C}) = p_M(\bar{C}) \times p(M) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$$

$$p(25) = p(T \cap \bar{C}) = p_T(\bar{C}) \times p(T) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

$$p(18) = p(P \cap \bar{C}) = p_P(\bar{C}) \times p(P) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$$

D'où, finalement :

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,1	0,12	0,4	0,18

Question 5.c.

L'espérance de la loi précédente vaut :

$$18 \times 0,02 + 20 \times 0,18 + 24 \times 0,1 + 25 \times 0,12 + 26 \times 0,4 + 27 \times 0,18 = 24,62$$

La somme totale moyenne dépensée par un grand nombre de clients sera proche de 24,62€