POLYNESIE – Série S – Juin 2001 – Exercice

Une boîte contient 8 cubes : $\begin{cases} \text{1 gros rouges et 3 petits rouges} \\ \text{2 gros verts et 1 petit vert} \\ \text{1 petit jaune} \end{cases}$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).

Les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

1. On note : A, l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » ; B, l'événement : « Obtenir au plus un petit cube ».
   a) Calculer la probabilité de A.
   b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X ;
   b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète n fois l'épreuve « Tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.
   On note P_n la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois.
   a) Déterminer P_n en fonction de n.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P_n \geq 0{,}99$.

Analyse

Calcul de probabilités, variable aléatoire et schéma de Bernoulli sont les principaux thèmes abordés dans cet exercice.
Dans la mesure où ni la taille, ni la couleur des cubes n'influencent les tirages, la situation est équivalente à celle d'une urne comportant des boules colorées, numérotées et indiscernables.

Résolution

En guise de préambule, déterminons le nombre total N de tirages possibles. Cette quantité va nous servir à calculer les probabilités demandées dans l'exercice (questions 1. et 2.).

Le nombre total de tirages simultanés est, l'ordre n'important pas ici, le nombre de combinaisons de 3 cubes parmi les 8 disponibles. Soit :

$$\mathrm{N} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2} = 8\times 7 = \boxed{56}$$

L'univers Ω associé à l'expérience comporte donc 56 éléments : $\mathrm{Card}(\Omega) = 56$.

Question 1.a.

Soit donc l'événement A : « Obtenir des cubes de couleurs différentes ».

Comme précisé, la boîte contient 8 cubes et le tirage d'un cube ne dépend ni de sa taille, ni de sa couleur. En d'autres termes, tous les cubes ont la même probabilité d'être tirés de la boîte. Par ailleurs, l'ordre n'intervient pas dans cette expérience.

Il suffit donc, pour déterminer $P(\mathrm{A})$, de dénombrer tous les tirages favorables, c'est à dire $\mathrm{Card}(\mathrm{A})$. On aura alors : $P(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Dans un tirage, élément de A, on a donc : 1 cube rouge, 1 cube vert et 1 cube jaune :

- Il y a $\binom{4}{1} = 4$ possibilités pour le cube rouge ;
- Il y a $\binom{3}{1} = 3$ possibilités pour le cube vert ;
- Il n'y a qu'une possibilité pour le cube jaune ($C_1^1 = 1$).

L'ensemble A comporte donc $4\times 3\times 1 = 12$ éléments : $\mathrm{Card}(A) = 12$.

Il vient donc : $P(\mathrm{A})=\dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\dfrac{12}{56}=\dfrac{4\times 3}{4\times 14}=\dfrac{3}{14}$.

$$\boxed{P(\mathrm{A})=\frac{3}{14}}$$

Question 1.b.

Soit maintenant l'événement B : « Obtenir au plus un petit cube ».

On peut écrire B sous la forme d'une réunion de deux événements incompatibles :

- B_1 : « Obtenir aucun petit cube » ;
- B_2 : « Obtenir exactement un petit cube ».

On a bien : $\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 = \varnothing$.

On aura alors : $P(\mathrm{B})=P(\mathrm{B}_1)+P(\mathrm{B}_2)=\dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{B}_1)+\mathrm{Card}(\mathrm{B}_2)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

La boîte comporte 3 gros cubes et 5 petits cubes.

Il n'y a qu'une seule possibilité de n'obtenir aucun petit cube puisqu'il convient alors d'obtenir les 3 gros cubes !
On a donc : $\mathrm{Card}(\mathrm{B}_1)=1$.

Evaluons maintenant $\mathrm{Card}(\mathrm{B}_2)$. On souhaite qu'un tirage de B_2 comporte exactement 1 petit cube. Il y a $\dbinom{5}{1}=5$ possibilités pour ce petit cube. Pour un petit cube donné, il convient d'évaluer le nombre de possibilités de tirer 2 gros cubes parmi les 3 : soit $\dbinom{3}{2}=3$ possibilités.

Il y a donc $5\times 3=15$ tirages comportant exactement un petit cube.
On a donc : $\mathrm{Card}(\mathrm{B}_2)=15$.

Il vient alors : $P(\mathrm{B})=\dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{B}_1)+\mathrm{Card}(\mathrm{B}_2)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\dfrac{1+15}{56}=\dfrac{16}{56}=\dfrac{2\times 8}{7\times 8}=\boxed{\dfrac{2}{7}}$

$$\boxed{P(\mathrm{B})=\frac{2}{7}}$$

Question 2.a.

X est la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

X peut prendre quatre valeurs possibles : 0, 1, 2 ou 3. On doit donc déterminer $P(\mathrm{X}=i)$ pour $i \in \{0,1,2,3\}$.

Les tirages possibles conduisant à $\mathrm{X}=i$ consistent à tirer dans la boîtes :

- i petits cubes rouges parmi les 3 petits cubes rouges, soient $\binom{3}{i}$ possibilités ;
- $3-i$ cubes parmi les 5 autres cubes, soient $\binom{5}{3-i}$ possibilités.

On en déduit alors :

$$P(\mathrm{X}=i)=\frac{\binom{3}{i}\times\binom{5}{3-i}}{56}=\frac{\frac{3!}{i!(3-i)!}\times\frac{5!}{(3-i)!(2+i)!}}{56}=\frac{3!5!}{56(2+i)!i!\left((3-i)!\right)^2}$$

→ $P(\mathrm{X}=0)$

Pour $i=0$ la formule précédente donne :

$$P(\mathrm{X}=0)=\frac{3!5!}{56\times 2!(3!)^2}=\frac{5!}{56\times 2\times 3!}=\frac{5\times 4}{56\times 2}=\frac{5}{28}$$

$$\boxed{P(\mathrm{X}=0)=\frac{5}{28}}$$

→ $P(\mathrm{X}=1)$

Pour $i=1$ la formule précédente donne :

$$P(\mathrm{X}=1)=\frac{3!5!}{56\times 3!(2!)^2}=\frac{5!}{56\times 2\times 2}=\frac{5\times 4\times 3\times 2}{56\times 2\times 2}=\frac{15}{28}$$

$$\boxed{P(\mathrm{X}=1)=\frac{15}{28}}$$

→ $P(\mathrm{X}=2)$

Pour $i=2$ la formule précédente donne :

$$P(\mathrm{X}=2)=\frac{3!5!}{56\times 4!2!}=\frac{5\times 3!}{56\times 2}=\frac{5\times 3}{56}=\frac{15}{56}$$

$$\boxed{P(\mathrm{X}=2)=\frac{15}{56}}$$

→ $P(\mathrm{X}=3)$

Il n'y a qu'un tirage comportant trois petits cubes rouges. Donc : $P(\mathrm{X}=3)=\frac{1}{56}$

$$\boxed{P(\mathrm{X}=3)=\frac{1}{56}}$$

(Note : on retrouve bien ce résultat avec la formule générale mais l'emploi de cette dernière n'est en rien une obligation !)

Finalement :

i	0	1	2	3
$P(\mathrm{X}=i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

Question 2.b.

L'espérance mathématique de X est donnée par : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=0}^{3} iP(\mathrm{X}=i)$.

Avec les valeurs obtenues précédemment, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} iP(\mathrm{X}=i) &= \left(0\times\frac{5}{28}\right)+\left(1\times\frac{15}{28}\right)+\left(2\times\frac{15}{56}\right)+\left(3\times\frac{1}{56}\right)\\ &= \frac{30+30+3}{56}=\frac{63}{56}=\boxed{\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{9}{8}}$$

Question 3.a.

Nous avons affaire ici à un schéma de Bernoulli (répétition d'épreuves indépendantes).

P_n est la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois.

Nous allons en fait calculer la probabilité de l'événement contraire « B ne se réalise pas une seule fois ».

On a calculé à la question 1.b. la probabilité de l'événement B. La probabilité de l'événement contraire vaut : $P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)=1-P\left(\mathrm{B}\right)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$.

La probabilité que B ne se réalise pas une seule fois au cours de n épreuves vaut donc : $1-P_n=\left(P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)\right)^n=\left(\frac{5}{7}\right)^n$. On en tire alors : $P_n=1-\left(\frac{5}{7}\right)^n$.

$$\boxed{P_n=1-\left(\frac{5}{7}\right)^n}$$

Question 3.b.

On a :

$$P_n\geq 0,99 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{7}\right)^n\geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^n\leq 0,01$$
$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{7}\right)\leq \ln\left(0,01\right) \Leftrightarrow n\geq \frac{-2\ln 10}{\ln 5-\ln 7} \Leftrightarrow \boxed{n\geq \frac{2\ln 10}{\ln 7-\ln 5}}$$

(l'inversion de l'inégalité résulte du fait que $\ln\left(\frac{5}{7}\right)<0$ puisque $5<7$).

Or : $\frac{2\ln 10}{\ln 7-\ln 5}\simeq 13,687$. Le plus petit entier n tel que $P_n\geq 0,99$ vaut donc $n=14$.

$$\boxed{n=14}$$