POLYNESIE – Série S – Septembre 2000 – Exercice

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k entier et $1 \leq k \leq 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- Les six faces ne sont pas équiprobables ;
- Les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r ;
- Les nombres p_1, p_2 et p_4, dans cet ordre, sont trois termes d'une suite géométrique.

1. Démontrer que $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.
2. On lance le dé une fois et on considère les événements suivants :

   A : « Le nombre obtenu est pair » ;
   B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
   C : « Le nombre obtenu est égal à 3 ou 4 ».

a) Calculer la probabilité de chacun de ces événements.
b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.
c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires ;
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1 ;
- S'il obtient un nombre impair, il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche. On note G cet événement.

a) Déterminer la probabilité de l'événement , puis la probabilité de l'événement G.
b) Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer de dé.

Analyse

Pour une fois le dé est pipé ! La situation est prétexte à un travail préparatoire (correspondant à la première question) pour déterminer la probabilité d'obtention d'un numéro donné.
Les deux autres questions visent principalement à évaluer les connaissances du candidat en matière de probabilité conditionnelle. La définition des « événements » est, de fait, importante.

Résolution

Question 1.

Il convient ici de commencer par traduire les hypothèses fournies.

Les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sont, dans cet ordre, six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison *r*. On a donc :

$$p_2 = p_1 + r\ ,\ \ p_3 = p_1 + 2r\ ,\ \ p_4 = p_1 + 3r\ ,\ \ p_5 = p_1 + 4r\ \text{ et }\ p_6 = p_1 + 5r \qquad (1)$$

Puisque les six faces du dé ne sont pas équiprobables, on a : $r \neq 0$ (sans quoi les six probabilités sont égales et … le dé n'est pas truqué !).

Les nombres p_1, p_2 et p_4 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. D'où :

$$\frac{p_4}{p_2} = \frac{p_2}{p_1} \qquad (2)$$

(Note : ce rapport étant la raison de la suite géométrique)

Il vient, d'après ce qui précède :

$$\frac{p_4}{p_2} = \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \frac{p_1 + 3r}{p_1 + r} = \frac{p_1 + r}{p_1} \Leftrightarrow 1 + \frac{2r}{p_1 + r} = 1 + \frac{r}{p_1} \Leftrightarrow 2rp_1 = r\left(p_1 + r\right) \Leftrightarrow 2p_1 = p_1 + r \Leftrightarrow \boxed{p_1 = r}$$

(Note : l'avant-dernière équivalence est licite puisque : $r \neq 0$)

Comme $p_1 = r$, on a, d'après (1) : $p_2 = 2r$, $p_3 = 3r$, $p_4 = 4r$, $p_5 = 5r$ et $p_6 = 6r$.
Soit : pour tout entier *k* dans $\{1,2,3,4,5,6\}$, $p_k = kr$. Il convient donc de déterminer *r*.
Pour cela, on utilise le fait que la somme des six probabilités p_k doit être égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{6} p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} kr = 1 \Leftrightarrow r\sum_{k=1}^{6} k = 1 \Leftrightarrow r\left(1+2+3+4+5+6\right) = 1 \Leftrightarrow 21r = 1 \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{1}{21}}$$

Finalement :

$$\forall k \in \{1,2,3,4,5,6\},\ p_k = \frac{k}{21}$$

Question 2.

a) L'univers est ici l'ensemble des nombres indiqués par les faces du dés :

$$\mathrm{U} = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

→ L'événement A, « Le nombre obtenu est pair », correspond à la partie suivante de U :

$$\mathrm{A} = \{2,4,6\}$$

On a donc : $P(\mathrm{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \boxed{\frac{4}{7}}$

$$P(\mathrm{A}) = \frac{4}{7}$$

→ L'événement B, « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à trois », correspond à la partie suivante de U :

$$\mathrm{B} = \{3,4,5,6\}$$

On a donc : $P(\mathrm{B}) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \boxed{\frac{6}{7}}$

$$P(\mathrm{B}) = \frac{6}{7}$$

L'événement C, « Le nombre obtenu est égal à 3 ou 4 », correspond à la partie suivante de U :

$$\mathrm{C} = \{3,4\}$$

On a donc : $P(\mathrm{C}) = p_3 + p_4 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$$P(\mathrm{C}) = \frac{1}{3}$$

b) On cherche la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

Nous avons ici affaire à une probabilité conditionnelle correspondant à : $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ d'après la définition des événements A et B.

Pour déterminer cette probabilité, nous pouvons utiliser la relation :

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}.$$

Nous connaissons $P(\mathrm{A})$ (calculée ci-dessus). Il convient donc de calculer $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})$.

L'événement $\mathrm{B} \cap \mathrm{A}$ s'écrit « Le nombre obtenu est pair et supérieur ou égal à 3 ».

Il correspond donc à la partie suivante de U : $\mathrm{B} \cap \mathrm{A} = \{4, 6\}$

On a donc : $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = p_4 + p_6 = \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$

On en tire : $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{10}{21} \times \frac{7}{4} = \boxed{\frac{5}{6}}$

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{5}{6}$$

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a calculé : $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = \frac{10}{21}$. Or, on a : $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = \frac{4}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{24}{49}$.

On a donc : $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \neq p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$.

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Les événements A et C sont-ils indépendants ?

On a : $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$ et $\mathrm{C} = \{3, 4\}$. D'où $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \{4\}$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = p_4 = \frac{4}{21}$.

Par ailleurs : $p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{C}) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$.

D'où, finalement : $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{C})$.

Les événements A et C sont indépendants.

Question 3.

a) Déterminons la probabilité de l'événement $G \cap A$.

On connaît $p(A)$ et on dispose de la relation : $p(G \cap A) = p(G|A)\,p(A)$. Il nous suffit donc ici de déterminer $p(G|A)$. Cette probabilité est la probabilité que le joueur soit déclaré gagnant sachant qu'il tire une boule dans l'urne U_1.
L'urne U_1 contient quatre boules indiscernables, une boule blanche et trois boules noires. Le tirage étant équiprobable, la probabilité de tirer la boule blanche vaut donc : $\frac{1}{4}$. Soit :

$$p(G|A) = \frac{1}{4}$$

Il vient donc : $p(G \cap A) = p(G|A)\,p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{1}{7}}$

$$p(G \cap A) = \frac{1}{7}$$

Déterminons maintenant $p(G)$.

Lors de la première étape du jeu, le nombre fourni par le dé est soit pair, soit impair.
L'événement « Le nombre obtenu est impair » est simplement $\overline{A}$ et on a :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Comme $G = (G \cap A) \cup (G \cap \overline{A})$ (puisque $U = A \cup \overline{A}$) et $A \cap \overline{A} = \varnothing$, il vient (formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned}
P(G) &= P(G \cap A) + P(G \cap \overline{A}) \\
&= P(G|A)P(A) + P(G|\overline{A})P(\overline{A}) \\
&= P(G|A)P(A) + P(G|\overline{A})(1 - P(A))
\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, toutes les probabilités sont connues hormis $P(G|\overline{A})$ qui correspond à l'événement « Gagner le jeu sachant que l'on tire une boule dans l'urne U_2 ».
Cette urne contenant cinq boule indiscernables, deux blanches et une noire, et les tirages étant équiprobables, il vient :

$$P(G|\overline{A}) = \frac{2}{3}$$

On a alors :

$$P(\mathrm{G}) = P(\mathrm{G}|\mathrm{A})P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{G}|\overline{\mathrm{A}})(1 - P(\mathrm{A}))$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{1}{7} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{7}\right) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

$$P(\mathrm{G}) = \frac{3}{7}$$

b) On suppose ici que le joueur est gagnant. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair ?

On cherche en fait : $P(\mathrm{A}|\mathrm{G})$. On a : $P(\mathrm{A}|\mathrm{G}) = \dfrac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{G})}{P(\mathrm{G})} = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{G}) = \frac{1}{3}$$