Amérique du Nord – Mai 2011 – Série S – Exercice

Partie A : Restitution organisée des connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1 \left(\text{modulo } p\right)$ ».

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

3. Montrer que, pour tout entier naturel pair n non nul, u_n est divisible par 4.

On note $\left(\text{E}\right)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite $\left(u_n\right)$.

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble $\left(\text{E}\right)$?

5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

a. Montrer que :

$$6\times 2^{p-2} \equiv 3 \left(\text{modulo } p\right) \text{ et } 6\times 3^{p-2} \equiv 2 \left(\text{modulo } p\right).$$

b. En déduire que $6\times u_{p-2} \equiv 0 \left(\text{modulo } p\right)$.

c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble $\left(\text{E}\right)$?

Analyse

Divisibilité et congruences sont les ingrédients essentiels de cet exercice. Au-delà de la restitution organisée des connaissances (Attention ! La démonstration demandée est très classique et doit être connue !) et des premières questions de la partie B, c'est la question 5 qui s'avère être la plus délicate et … la plus intéressante même si, là encore, elle fait essentiellement appel à quelques propriétés fondamentales des congruences.

Résolution

Partie A : Restitution organisée des connaissances

Rappelons le théorème de Gauss :

Si *a*, *b* et *c* sont trois entiers relatifs non nuls tels que *a* divise le produit *bc* en étant premier avec *b* alors *a* divise *c*.

Comme *a* et *b* sont premiers entre eux, le théorème de Bézout nous permet d'affirmer qu'il existe deux entiers *u* et *v* tels que l'on a :

$$au+bv=1$$

Il vient alors : $\left(au+bv\right)c=c$, soit : $auc+bvc=c$.
Comme *a* divise le produit *bc*, il existe un entier *k* tel que : $bc=ka$. L'égalité précédente se récrit alors : $auc+vka=c$, soit : $a\left(uc+vk\right)=c$. *a* divise bien *c*.

Partie B

Question 1.

On a facilement :

$$u_1=2^1+3^1+6^1-1=\boxed{10}$$
$$u_2=2^2+3^2+6^2-1=\boxed{48}$$
$$u_3=2^3+3^3+6^3-1=\boxed{250}$$
$$u_4=2^4+3^4+6^4-1=\boxed{1\,392}$$
$$u_5=2^5+3^5+6^5-1=\boxed{8\,050}$$
$$u_6=2^6+3^6+6^6-1=\boxed{47\,448}$$

$u_1=10$, $u_2=48$, $u_3=250$, $u_4=1392$, $u_5=8\,050$ et $u_6=47\,448$.

Question 2.

Comme 2 et 6 sont pairs et que n est un entier naturel non nul, on en déduit immédiatement que 2^n et 6^n sont deux entiers pairs. Il en va de même pour leur somme.
Ainsi, u_n est pair si, et seulement si, $3^n - 1$ est pair.
Or, tout puissance d'exposant un entier naturel d'un entier impair est impaire (on retrouve rapidement ce résultat en considérant $(2k+1)^n$ et en utilisant la formule du binôme de Newton). Ainsi, 3^n est un entier impair et $3^n - 1$ est un entier pair.
Le résultat est ainsi établi.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

Question 3.

On veut montrer ici que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4 \mid u_{2n}$.

Pour tout entier naturel pair n non nul, on a : $2^{2n} + 6^{2n} = 4^n + 36^n = 4^n\left(1 + 9^n\right)$.
L'entier n étant non nul, on en déduit ainsi que $2^{2n} + 6^{2n}$ est divisible par 4.

Intéressons-nous désormais à : $3^{2n} - 1$.
On a immédiatement : $3^2 = 9 \equiv 1 \ (\text{modulo } 4)$.
Il vient alors, pour tout entier naturel n : $\left(3^2\right)^n = 3^{2n} \equiv 1^n \ (\text{modulo } 4)$, c'est-à-dire :
$3^{2n} \equiv 1 \ (\text{modulo } 4)$.
En définitive $3^{2n} - 1$ est divisible par 4.

$2^{2n} + 6^{2n}$ et $3^{2n} - 1$ étant divisibles par 4 pour tout entier naturel n non nul, il en va de même pour leur somme, c'est-à-dire u_{2n}.

Pour tout entier naturel n non nul, u_{2n} est divisible par 4.

Question 4.

2 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise tous les termes (donc au moins un !) de la suite (u_n).
3 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise u_2 : $u_2 = 48 = 3 \times 16$.
5 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise u_3 : $u_3 = 250 = 5 \times 50$.
7 appartient à (E) puisqu'il est premier et divise u_5 : $u_5 = 8\,050 = 7 \times 1150$.

2, 3, 5 et 7 appartiennent à l'ensemble (E).

Question 5.a.

Soit p un entier premier strictement supérieur à 3.

Puisqu'il premier, il est impair et donc premier avec 2. Le petit théorème de Fermat nous permet alors d'écrire : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Comme $p > 3$, on a $p - 1 > 2 > 0$ et on peut écrire : $2 \times 2^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$.

D'où : $3 \times 2 \times 2^{p-2} \equiv 3 \times 1 \pmod{p}$, soit : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$.

Comme p est premier et strictement supérieur à 3 (c'est fondamentalement ici que cette hypothèse intervient), il est premier avec 3 et le petit théorème de Fermat nous donne :

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Comme précédemment, on peut alors écrire : $3 \times 3^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$.

D'où : $2 \times 3 \times 3^{p-2} \equiv 2 \times 1 \pmod{p}$, soit : $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

Pour tout entier premier strictement supérieur à 3, on a :
$6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

Question 5.b.

On a : $u_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$.

Donc : $6 \times u_{p-2} = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6 \times 6^{p-2} - 6 \times 1 = 6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6$.

Comme (cf. la question précédente) : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, il vient :
$2^{p-1} \times 3^{p-1} \equiv 1 \times 1 \pmod{p}$, soit : $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On a donc : $6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et, d'après la question précédente : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.

On en tire alors : $6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} \equiv 3 + 2 + 1 \pmod{p}$.

D'où : $6 \times 2^{p-2} + 6 \times 3^{p-2} + 6^{p-1} - 6 \equiv 6 - 6 \pmod{p}$, soit $6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

Pour tout entier p premier strictement supérieur à 3, on a :
$6 \times u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

Question 5.c.

D’après la question précédente, l’entier premier p divise $6\times u_{p-2}$.
Or, p étant premier et strictement supérieur à 3, il est premier différent de 2 et 3 et donc premier avec 6. Le théorème de Gauss nous permet alors d’affirmer que p divise u_{p-2}.
L’entier p étant premier et divisant le terme u_{p-2} de la suite (u_n), il est élément de l’ensemble (E).

L’entier p appartient à l’ensemble (E).

Remarque : 2 et 3 sont éléments de (E) (question 4.) et tout entier premier p strictement supérieur à 3 étant également élément de (E), on en déduit que tout entier premier est élément de (E).