

**Partie A – Restitution organisée des connaissances**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$  ;
- Si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \geq 0$  alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ .

Montrer que : si pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) \leq g(t)$  alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ .

**Partie B**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On appelle  $f_n$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$  et on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ .

On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .  
b. Etudier les variations de  $f_1$  sur  $[0; +\infty[$ .  
c. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$  et interpréter graphiquement le résultat.  
(Pour le calcul de  $I_1$ , on pourra utiliser : pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ )
2. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \ln 2$ .  
b. Etudier les variations de la suite  $(I_n)$ .

c. En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.

3. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .

a. Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

b. En déduire le signe de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

Montrer alors que pour tout entier naturel  $n$  non nul, et pour tout  $x$  réel positif, on a :

$$\ln(1+x^n) \leq x^n$$

c. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

---

## Analyse

Deux thèmes principaux : les suites et les intégrales. Ce « couple » est désormais un grand classique que l'on va devoir (si ce n'est déjà fait !) s'habituer à rencontrer régulièrement. Les techniques calculatoires étant finalement assez standard, l'exercice ne présente pas de difficulté particulière mais couvre une bonne partie des chapitres correspondants du programme : croissance de l'intégrale, intégration par parties, suites bornées, suites décroissante et minorée, ... sans oublier quelques variations (fonction et suite) comme études de base !

---

## Résolution

### Partie A – Restitution organisée des connaissances

Puisque l'on a :  $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$ , il vient immédiatement  $\forall t \in [a, b], (g - f)(t) \geq 0$ .

D'après le deuxième résultat fourni, on a alors :  $\int_a^b (g(t) - f(t)) dt \geq 0$ .

Cette inégalité entraîne alors :  $\int_a^b (g(t) - f(t)) dt + \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt$ .

Le premier résultat fourni nous permet alors d'écrire :  $\int_a^b [(g(t) - f(t)) + f(t)] dt \geq \int_a^b f(t) dt$ ,

c'est-à-dire :  $\int_a^b g(t) dt \geq \int_a^b f(t) dt$ . Le résultat est ainsi établi.

Remarque : en toute rigueur, l'inégalité  $\int_a^b (g(t) - f(t)) dt \geq 0$  ne permet pas de conclure

puisque la propriété  $\int_a^b (-f(t)) dt = -\int_a^b f(t) dt$  ne fait pas partie des données ...

### Partie B

#### Question 1.a.

Pour tout réel  $x$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on a :  $f_1(x) = \ln(1+x)$ .

Comme :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ , il vient (composition) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

### Question 1.b.

La fonction  $f_1$  est la composée de :

- la fonction affine :  $x \mapsto x+1$  qui est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (le coefficient de «  $x$  » est strictement positif) et, à fortiori, sur  $[0; +\infty[$ . Cette fonction prend ses valeurs dans  $[1; +\infty[$  ;
- la fonction logarithme népérien qui est définie et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et, à fortiori, sur  $[1; +\infty[$ .

On en conclut immédiatement :

La fonction  $f_1$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

### Question 1.c.

$$\text{On a : } I_1 = \int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_0^1 \ln(1+x) \times 1 dx .$$

La fonction  $f_1$  est de la forme  $x \mapsto \ln(x+1) = \ln[g(x)]$  avec  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynôme et, à fortiori, sur  $[0; +1[$ . On a alors immédiatement, pour tout réel  $x$  de cet intervalle :

$$f_1'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x+1}$$

Cette fonction est elle-même définie et continue sur  $[0; +1[$  en tant que fonction rationnelle.

La fonction constante définie sur  $[0; +1[$  par  $x \mapsto 1$  est continue sur cet intervalle et y admet donc des primitives. Elles sont de la forme :  $x \mapsto x+k$  où  $k$  est une constante réelle que nous pouvons choisir librement. Au regard de l'expression de la dérivée de la fonction  $f_1$  et en ne perdant pas de vue l'objectif (intégration par partie), nous choisissons  $k = 1$ .

L'intégration par parties s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
 &= \left[ (x+1) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \frac{1}{x+1} dx \\
 &= (1+1) \ln(1+1) - (0+1) \ln(1+0) - \int_0^1 dx \\
 &= 2 \ln 2 - \cancel{\ln 1} - 1 \\
 &= 2 \ln 2 - 1
 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$$

Cette valeur correspond à l'aire du domaine limité par la courbe  $C_1$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

Remarque : on retrouve naturellement cette valeur en utilisant l'indication de l'énoncé.

### Question 2.a.

Pour tout  $n$  entier naturel non nul, la fonction  $x \mapsto x^n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et, à fortiori, sur  $[0; +1]$ . Il en va donc de même pour la fonction  $x \mapsto 1+x^n$ , puis, par composition avec la fonction logarithme népérien, pour la fonction  $x \mapsto \ln(1+x^n)$ .

On a donc :  $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \ln(1+0^n) \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(1+1^n)$ . Soit :  $0 \leq f_n(x) \leq \ln 2$ .

Par croissance de l'intégrale on a alors :  $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \ln 2 dx$ , soit, finalement :

$$0 \leq I_n \leq \ln 2$$

### Question 2.b.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \ln(1+x^{n+1}) dx - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \ln \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} dx
 \end{aligned}$$

Pour tout  $x$  réel, on a :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n \Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \Leftrightarrow 1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n.$$

On en déduit alors :  $0 < \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \leq 1$  et, enfin :  $\ln \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \leq 0$ .

Il vient alors :  $\int_0^1 \ln \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} dx \leq 0$ , soit  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ .

Finalement :

La suite  $(I_n)$  est décroissante.

### *Question 2.c.*

A la question 2.a. nous avons montré que la suite  $(I_n)$  était minorée par 0. Comme, d'après la question précédente, elle est décroissante, on en déduit immédiatement :

La suite  $(I_n)$  est convergente.

### *Question 3.a.*

On note que l'on a, pour tout réel  $x$  positif :  $g(x) = f_1(x) - x$ .

La fonction  $g$  est donc dérivable comme différence de deux fonctions dérivable et on a, pour tout réel  $x$  positif :

$$g'(x) = f_1'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

Pour  $x$  positif, on a  $1+x > 0$  et, de fait :  $g'(x) \leq 0$ . La fonction  $g$  est donc décroissante sur  $[0; +\infty[$  (elle y est même strictement décroissante puisque sa dérivée ne s'annule qu'en 0).

La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

### *Question 3.b.*

On a facilement :  $g(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln 1 = 0$ . D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a alors :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

La fonction  $g$  prend des valeurs négatives sur  $[0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x$  positif et tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $x^n \geq 0$ . Le résultat obtenu à la question précédente nous donne alors :  $g(x^n) \leq 0$ , c'est-à-dire :  $\ln(1+x^n) - x^n \leq 0$ .

Finalement :

$$\forall x \in [0; +\infty[ , \forall n \in \mathbb{N}^* , \ln(1+x^n) \leq x^n$$

### Question 3.c.

L'inégalité précédente nous donne (croissance de l'intégrale), pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx , \text{ soit : } I_n \leq \int_0^1 x^n dx .$$

$$\text{Or, on a : } \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} .$$

En utilisant la minoration de la question 2.a., on a donc :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , le théorème des gendarmes nous donne immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$