

### Partie A

Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1. Etudier les variations de  $u$  sur  $]0; +\infty[$  et préciser ses limites en 0 et en  $+\infty$ .
2. a. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique sur  $]0; +\infty[$ .  
On notera  $\alpha$  cette solution.  
b. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
3. Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
4. Montrer l'égalité :  $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

1. Exprimer, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $u(x)$ .
2. En déduire les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on note :

- $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $\ln$  (logarithme népérien) ;
- $A$  le point de coordonnées  $(0; 2)$  ;
- $M$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

1. Montrer que la distance  $AM$  est donnée par  $AM = \sqrt{f(x)}$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .
  - a. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  ont les mêmes variations sur  $]0; +\infty[$ .
  - b. Montrer que la distance  $AM$  est minimale en un point de  $\Gamma$ , noté  $P$ , dont on précisera les coordonnées.
  - c. Montrer que  $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ .
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite  $(AP)$  est-elle perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en  $P$  ?

---

## Analyse

Une étude de fonctions assez complète visant finalement à résoudre un problème d'optimisation : minimiser la distance d'un point (le point A) à une courbe (ici la courbe représentative du logarithme népérien) avec, petite cerise sur le gâteau, un résultat (général) : au point de la courbe obtenu, la tangente et la droite passant par ce point et A sont perpendiculaires.

---

## Résolution

### Partie A

#### Question 1.

La fonction carrée  $x \mapsto x^2$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ . Il en va donc de même pour la fonction polynôme  $x \mapsto x^2 - 2$ .

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

La fonction  $u$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  comme somme de deux fonctions strictement croissantes sur cet intervalle.

La fonction  $u : x \mapsto x^2 - 2 + \ln x$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

Remarque : on aurait également pu calculer  $u' : x \mapsto 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$  et montrer alors que la dérivée de  $u$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ . Si cette méthode (étude du signe de la dérivée) est générale et souvent choisie (ou suggérée) par les élèves, il convient de ne pas oublier d'autres résultats généraux permettant de conclure !

On a facilement :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 2) = 0 - 2 = -2$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ .

D'où (somme) :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = -\infty$ .

On a également :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

D'où (somme) :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty .$$

### Question 2.a.

La fonction  $x \mapsto x^2 - 2$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant que fonction polynôme.

La fonction logarithme népérien est continue sur  $]0; +\infty[$ .

La fonction  $u$  est donc continue sur  $]0; +\infty[$  comme somme de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Par ailleurs, d'après la question précédente :

- La fonction  $u$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  ;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ .

Le théorème des valeurs intermédiaire nous permet alors de conclure que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique sur  $]0; +\infty[$ .

L'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique,  $\alpha$ , sur  $]0; +\infty[$ .

### Question 2.b.

On a facilement :

$$u(1) = 1^2 - 2 + \ln 1 = 1 - 2 + 0 = -1 < 0 \text{ et } u(2) = 2^2 - 2 + \ln 2 = 4 - 2 + \ln 2 = 2 + \ln 2 > 0$$

On en tire :  $1 < \alpha < 2$ .

En tabulant alors  $u$  avec la calculatrice avec un pas de 0,1 on obtient :

$$u(1,3) \approx -0,04764 < 0 \text{ et } u(1,4) \approx 0,29647 > 0$$

On en tire :  $1,3 < \alpha < 1,4$ .

En tabulant alors  $u$  avec la calculatrice avec un pas de 0,01 on obtient :

$$u(1,31) \approx -0,01387 < 0 \text{ et } u(1,32) \approx 0,0200 > 0$$

On en tire :  $1,31 < \alpha < 1,32$ .

$$1,31 < \alpha < 1,32$$

### Question 3.

En tenant compte de la croissance stricte de  $u$  sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$x < \alpha \Leftrightarrow u(x) < u(\alpha) \Leftrightarrow u(x) < 0$$

On en conclut immédiatement :

- $u(x) < 0$  pour tout réel  $x$  strictement inférieur à  $\alpha$  ;
- $u(\alpha) = 0$  ;
- $u(x) > 0$  pour tout réel  $x$  strictement supérieur à  $\alpha$ .

#### Question 4.

On a :

$$u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

$$\ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

### Partie B

#### Question 1.

Pour tout  $x$  réel de  $]0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = 2x + 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) \times (2 - \ln x) = 2 \left(x - \frac{2 - \ln x}{x}\right) = 2 \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x} = 2 \frac{u(x)}{x}$$

$$\text{Pour tout } x \text{ réel de } ]0; +\infty[ : f'(x) = 2 \frac{u(x)}{x}.$$

#### Question 2.

Comme  $x$  est strictement positif sur  $]0; +\infty[$ , le signe de  $f'(x)$ , est d'après la question précédente, celui de  $u(x)$ . D'après la question 3. de la partie A il vient alors :

- Si  $x$  appartient à  $]-\infty; \alpha]$ ,  $f$  est strictement décroissante ;
- Si  $x$  appartient à  $[\alpha; +\infty[$ ,  $f$  est strictement croissante.

### Partie C

#### Question 1.

Le point  $M$  admet pour coordonnées  $(x; \ln x)$  et on en tire :  $\overline{AM}(x; \ln x - 2)$ .

Le repère considéré étant orthonormé, on a :

$$AM^2 = \|\overline{AM}\|^2 = x^2 + (\ln x - 2)^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$$

Finalement :

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

### Question 2.a.

La fonction  $g$  est la composée de la fonction  $f$  et de la fonction racine carrée. Cette dernière étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit immédiatement que les fonctions  $f$  et  $g$  ont les mêmes variations sur  $]0; +\infty[$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  ont les mêmes variations sur  $]0; +\infty[$ .

### Question 2.b.

D'après la question 2 de la partie B, la fonction  $f$  admet un minimum global unique en  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ . D'après la question précédente, il en ira de même pour la fonction  $g$ .

Graphiquement, cette valeur minimum est atteinte au point de  $\Gamma$ , noté  $P$ , d'abscisse  $\alpha$ . Son ordonnée vaut :  $\ln \alpha$ . D'après la question 4 de la partie A, on a :  $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ . En définitive :

La distance  $AM$  est minimale pour le point  $P(\alpha; 2 - \alpha^2)$ .

### Question 2.c.

Comme on a  $P(\alpha; 2 - \alpha^2)$ , il vient :  $\overline{AP}(\alpha; -\alpha^2)$  et, en tenant compte de  $\alpha > 0$  :

$$AP = \|\overline{AP}\| = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

### Question 3.

La dérivée de la fonction logarithme népérien étant la fonction inverse, la tangente à  $\Gamma$  au point  $P(\alpha; 2 - \alpha^2)$  admet pour vecteur directeur :  $\vec{v}\left(1; \frac{1}{\alpha}\right)$ .

Le repère considéré étant orthonormal, on a alors immédiatement :

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = \alpha \times 1 + (-\alpha^2) \times \frac{1}{\alpha} = \alpha - \alpha = 0$$

On en déduit ainsi que les vecteurs  $\overrightarrow{AP}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux et, finalement, que :

La droite  $(AP)$  est perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en  $P$ .