Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie *A* d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ de dimension finie et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, la notation $| \ |$ désigne, suivant le cas, la valeur absolue ou le module.

Suites de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur *A*.
On dira que la suite « $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction *f* » si, pour tout élément *x* de *A*, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (la limite étant notée $f(x)$). C'est-à-dire :

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur *A*.
On dira que la suite « $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction *f* » si on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

On a les équivalences :

$$\left\{ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left\| f_n - f \right\|_\infty \leq \varepsilon \right\}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left\| f_n - f \right\|_\infty = 0$$

La norme $\| \ \|_\infty$ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de *A* dans $\mathbb{K}$ est ainsi appelée « norme de la convergence uniforme ».

Théorème

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.
Si $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge <u>uniformément</u> vers la fonction f **alors** $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge <u>simplement</u> vers la fonction f.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions sur toute partie compacte

Définition

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.
On dira que « la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge <u>uniformément sur toute partie compacte</u> de A » si, pour toute partie K compacte de A, la suite $\left(f_n|_K\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

Théorème

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.
Si $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A **alors** $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur toute partie compacte de A.

Propriétés de la limite

Théorème

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.
Si pour tout entier naturel n la fonction f_n est bornée et si la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f **alors** la fonction f est bornée.

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.
Si pour tout entier naturel n la fonction f_n est continue sur A et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur toute partie compacte de A vers une fonction f **alors** la fonction f est continue.

En particulier, si les f_n sont continues sur A et si la suite f_n converge uniformément sur A vers la fonction f alors celle-ci est continue sur A.

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et a un élément de l'adhérence de A.
Si pour tout entier naturel n, la fonction f_n admet une limite y_n en a et **si** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers la fonction f **alors** la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et la fonction f admet une limite en a égale à y :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n$$

Soit encore :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(x)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right]}$$

Séries de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.
On peut définir la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions « sommes partielles » par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in A,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée « série de fonctions associée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».
On la note $\sum f_n$.

Une série de fonction peut converger : simplement, absolument, uniformément ou normalement. Nous allons définir ces modes de convergence et exhiber les liens existant entre eux.

Convergence simple d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
On dira que « la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S » si, pour tout x élément de A, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge. La fonction S est alors appelée « fonction somme » et on peut définir « la fonction reste d'indice n », notée R_n, par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in A,\ R_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$$

$$\sum f_n \text{ converge } \underline{\text{simplement}} \text{ vers la fonction } S$$
$$\Leftrightarrow \left\{\forall x\in A,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)-S(x)\right|\leq\varepsilon\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\forall x\in A,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Rightarrow\left|S_n(x)-S(x)\right|\leq\varepsilon\right\}$$

Remarque :

Si la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S=S_n+R_n$$

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
Si la série $\sum f_n$ converge <u>simplement</u> vers la fonction S alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Convergence absolue d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
On dira que « la série $\sum f_n$ converge <u>absolument</u> sur A » si, pour tout x de A, la série $\sum |f_n(x)|$ converge.

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
Si la série $\sum f_n$ converge <u>absolument</u> sur A alors elle converge <u>simplement</u> sur A.

Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
On dira que « la série $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> vers la fonction S sur A » si la suite associée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément vers S sur A. Soit :

$$\left\{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| \leq \varepsilon\right\}$$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&\left\{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| \leq \varepsilon\right\} \\
\Leftrightarrow &\left\{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in A}\left|S_n(x) - S(x)\right| \leq \varepsilon\right\} \\
\Leftrightarrow &\left\{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left\|S_n - S\right\|_\infty \leq \varepsilon\right\} \\
\Leftrightarrow &\lim_{n\to+\infty}\left\|S_n - S\right\|_\infty = 0
\end{aligned}$$

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
La série $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> vers la fonction S sur A si, et seulement si

- elle converge simplement vers S sur A ;
- la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers la fonction nulle.

Ainsi, la convergence uniforme entraîne la convergence simple …

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
Si la série $\sum f_n$ converge <u>uniformément</u> vers la fonction S sur A **alors** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Propriétés de la somme

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
Si pour tout entier naturel n la fonction f_n est continue sur A et si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur A **alors** la fonction S est continue sur A.

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $\sum f_n$ la série associée.
Si pour tout entier naturel n la fonction f_n est continue sur A et **si** $\sum f_n$ converge uniformément sur toute partie compacte de A vers une fonction f, **alors** la fonction f est continue.

Théorème

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur *A*, $\sum f_n$ la série associée et *a* un élément de l'adhérence de *A*.
Si pour tout entier naturel *n*, la fonction f_n admet une limite y_n en *a* et **si** $\sum f_n$ converge uniformément sur *A* vers la fonction *S* **alors** la série $\sum y_n$ converge vers *y* et la fonction *S* admet une limite en *a* égale à *y* :

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n$$

Soit encore :

$$\lim_{x\to a}\left[\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k\right)(x)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\lim_{x\to a} f_k(x)\right]$$

Ou :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)}$$

Convergence normale d'une série de fonctions

Définition

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur *A* et $\sum f_n$ la série associée.
On dira que « la série $\sum f_n$ converge normalement sur *A* » si la série $\sum \left\| f_n \right\|_\infty$ converge.

Théorème

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur *A* et $\sum f_n$ la série associée.
Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur *A* **alors** elle converge uniformément et absolument sur *A*.

Remarque : une série de fonctions peut converger uniformément sans nécessairement converger absolument.