Synthèse de cours PanaMaths
→ Suites géométriques

Dans ce chapitre, le terme « suite » désigne une suite numérique (c'est-à-dire, dans le cadre du programme de Terminale ES, une suite de nombres réels). Une telle suite sera classiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) (notation retenue dans ce document) ou, plus simplement *u*.

Deux définitions et une propriété

Définition par récurrence

On dira que « la suite (u_n) est une suite géométrique » s'il existe un réel *q* non nul tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel *q* est alors appelé « la raison » de la suite géométrique.

Remarques :

❶ Tout terme (sauf le premier) d'une suite géométrique est donc obtenu à partir du précédent en le multipliant par un même réel, la raison.

❷ La relation de récurrence « $u_{n+1} = q \times u_n$ » ne suffit pas pour définir complètement une suite géométrique donnée. Il convient également d'en préciser l'un des termes (classiquement u_0). Ainsi, il existe une infinité de suites géométriques de raison *q* donnée.

Définition explicite

On dira que « la suite (u_n) est une suite géométrique » s'il existe un réel *q* non nul tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

Le réel *q* est alors appelé « la raison » de la suite géométrique.

Une propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison *q*.
Pour tous entiers naturels *n* et *p*, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Variations

Cas où $q < 0$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q < 0$.
La suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.
Elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \times u_{n+1} < 0$$

Remarque : une suite vérifiant la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \times u_{n+1} < 0$ est dite « alternée ».

Cas où $q > 0$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$.

Si $u_0 > 0$:

- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
  Dans cette situation, on parle de « croissance exponentielle ».

Si $u_0 < 0$:

- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Résultat fondamental

Soit q un réel différent de 1.
Soit n un entier naturel.

On a :

$$1+q+q^2+q^3+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

<u>Avertissement : le résultat suivant n'est pas au programme officiel.</u>

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Soit n et p deux entiers naturels ($n<p$).

On a :

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{p-1}+u_p=\frac{u_n-u_{p+1}}{1-q}$$

Limite d'une suite géométrique de raison strictement positive

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q>0$.

- Si $0<q<1$, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.
- Si $q=1$, la suite (u_n) est constante ($\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0$) et $\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0$.
- Si $q>1$, on doit considérer les deux sous-cas suivants :
  a. si $u_0<0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.
  b. si $u_0>0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Suites arithmético-géométriques

Définition

On dira que « la suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique » si elle est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$$

où a et b sont deux réels.

Cas particuliers

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$$

- Si $a = 0$, la suite (u_n) est constante à partir du rang 1 (au moins).
- Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = b$.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = a$.

Suite géométrique associée

Avertissement : le résultat suivant n'est pas au programme officiel. Il est cependant fondamental et très souvent mis en œuvre dans les exercices et sujets du baccalauréat.

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$$

avec $a \neq 1$.

La suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison *a*.