Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Réduction des endomorphismes en dimension finie

Dans ce document E désigne un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
La dimension de E est classiquement notée *n*.

Introduction

Derrière le terme « diagonalisation » se cache un souci simple : une matrice étant donnée, peut-on, après l'avoir interprétée comme la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, effectuer un changement de base de sorte que la nouvelle matrice soit diagonale ?

Ce souci est légitime au vu de la facilité calculatoire … déconcertante que procurent les matrices diagonales ! Pour autant, toute matrice n'est pas diagonalisable … Les matrices triangulaires viennent au second rang pour la simplicité des calculs. A défaut d'être diagonalisable, on cherchera donc à trigonaliser la matrice considérée.

Ainsi, réduire un endomorphisme signifie fondamentalement trouver une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale ou triangulaire.

Diagonalisation

Endomorphisme diagonalisable

Soit f un endomorphisme de E.

On dit que « f est diagonalisable » s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a immédiatement les équivalences :

f diagonalisable

$\Leftrightarrow$

il existe une base de vecteurs propres de f

$\Leftrightarrow$

E est la somme directe des sous-espaces propres de f : $\mathrm{E} = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}{\oplus} \mathrm{E}_\lambda$

Caractérisation par la dimension des sous-espaces propres

Rappelons que la somme des sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.
La caractérisation suivante en découle.

Théorème

f diagonalisable

$\Leftrightarrow$

la somme des dimensions des sous-espaces propres de *f* est égale à la dimension de E.

Rappelons également que si λ est une valeur propre de *f* d'ordre de multiplicité *m* (c'est l'exposant de $X - \lambda$ dans le polynôme caractéristique de *f*), alors la dimension du sous-espace propre E_λ est inférieure ou égale à *m* : $\dim E_\lambda \leq m$. D'où le corollaire :

Corollaire

f diagonalisable

$\Leftrightarrow$

le polynôme caractéristique de *f* est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de *f* est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante dans le polynôme caractéristique.

Conséquence immédiate (à avoir bien présente à l'esprit !) : si *f* possède *n* valeurs propres 2 à 2 distinctes alors *f* est diagonalisable.

Une remarque fondamentale !

Le corollaire ci-dessus fait apparaître le polynôme caractéristique de l'endomorphisme *f*. Le fait qu'il soit ou non scindé dépend en général du corps considéré ! En effet, il peut ne pas l'être dans $\mathbb{R}$ alors qu'il le sera toujours dans $\mathbb{C}$!

Caractérisation par le polynôme minimal

Rappelons qu'en dimension finie, tout endomorphisme admet un polynôme minimal.

Théorème

f diagonalisable
$\Leftrightarrow$
le polynôme minimal de f est scindé à racines simples.

Corollaire

f diagonalisable
$\Leftrightarrow$
f annule le polynôme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (\mathrm{X} - \lambda)$
$\Leftrightarrow$
f annule un polynôme scindé à racines simples

Remarques :

❶ Le polynôme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (\mathrm{X} - \lambda)$ n'est rien d'autre que le polynôme minimal de f lorsque celui-ci est diagonalisable.

❷ La dernière caractérisation est intéressante au plan pratique car elle permet de conclure à la diagonalisabilité d'un endomorphisme sans connaître son spectre.

Corollaire

Si f est diagonalisable **alors** la restriction de f à tout sous-espace vectoriel de E stable par f est également diagonalisable.

Matrices diagonalisables

Définition

La définition d'un « endomorphisme diagonalisable » conduit immédiatement à celle d'une « matrice diagonalisable » puisque toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut être interprétée comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ dans la base canonique de cet espace.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dira que « A est diagonalisable » si elle est semblable à une matrice diagonale.

Diagonaliser A équivaut alors à diagonaliser l'endomorphisme associé.
On devra donc, si A est diagonalisable, préciser une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{P\,D\,P}^{-1}$$

Remarque : les caractérisations mentionnées dans la partie précédente ne dépendent pas de la base choisie et sont donc valables lorsque l'on cherche à diagonaliser une matrice.

Trigonalisation

Endomorphisme trigonalisable

Soit *f* un endomorphisme de E.

On dit que « *f* est diagonalisable » s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de *f* est triangulaire supérieure.

Remarque : si dans la base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure alors dans la base $\mathscr{B}' = (\vec{e}_n, \vec{e}_{n-1}, ..., \vec{e}_1)$ sa matrice sera triangulaire inférieure. Le choix porté sur les matrices triangulaires supérieures est donc tout à fait arbitraire !

Caractérisation polynômiale

Théorème

f trigonalisable
$\Leftrightarrow$
Le polynôme minimal de f est scindé
$\Leftrightarrow$
Le polynôme caractéristique de f est scindé.
$\Leftrightarrow$
f admet un polynôme annulateur scindé

Corollaire

Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Matrices trigonalisables

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dira que « A est trigonalisable » si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Trigonaliser A équivaut alors à trigonaliser l'endomorphisme associé.
On devra donc, si A est trigonalisable, préciser une matrice triangulaire supérieure T et une matrice de passage P telles que :

$$A = P\,T\,P^{-1}$$